SISTEMAS LINEALES DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS: MÉTODOS

Definiciones previas

Un sistema es un conjunto de dos a más ecuaciones. Cada una de sus ecuaciones puede tener dos incógnitas. Si esas ecuaciones son de grado uno, los sistemas se llaman lineales.

La solución o soluciones de un sistema son el conjunto de valores de las incógnitas que verifican todas las ecuaciones. Un sistema puede tener varias soluciones (una, dos, cuatro…), infinitas o ninguna.

Ejemplos:

a) El sistema $\begin{cases} 4x - y = 9 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ es un sistema lineal. Su solución es $x = 2$ e $y = -1$: par (2, –1).

b) El sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - y = -2 \end{cases}$ no es lineal: es de segundo grado. Tiene dos pares de soluciones: $x = 1$ e $y = 3$; $x = -2$ e $y = 6$. Pares (1, 3) y (–2, 6).

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Su forma más simple (estándar) es $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ → (a, b, c y a', b', c' son números)

- La solución de un sistema es el par de valores de x e y que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Métodos de resolución

Método de sustitución: Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y su valor se sustituye en la otra. Se obtiene una nueva ecuación, cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo:

Para resolver por sustitución el sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ se procede así:

1) Se despeja y en la segunda ecuación ($y = 1 - 3x$).

2) Se lleva (se sustituye) su valor a la primera ecuación: $4x - 2(1 - 3x) = 8$.

3) Se resuelve la nueva ecuación: $4x - 2(1 - 3x) = 8 \Rightarrow 4x - 2 + 6x = 8 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$.

4) El valor $x = 1$ se lleva a la ecuación despejada: $y = 1 - 3 \cdot 1 = -2$.

La solución del sistema es: $x = 1$ e $y = -2$.

Método de igualación: Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando ambas incógnitas se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.

Ejemplo:

Para resolver por igualación el sistema $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ se procede así:

1) Se despeja y en ambas ecuaciones: $\begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = \dfrac{-1 - x}{2} \end{cases}$

2) Se igualan ambas incógnitas: $4x - 3 = \dfrac{-1 - x}{2}$.

3) Se resuelve la nueva ecuación: $4x-3=\frac{-1-x}{2} \Rightarrow 8x-6=-1-x \Rightarrow 9x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{9}$.

4) El valor $x=\frac{5}{9}$ se lleva a cualquiera de las ecuaciones, en particular a la primera ($E1$):

$y=4\cdot\frac{5}{9}-3=\frac{20-27}{9}=-\frac{7}{9}$. La solución del sistema es: $x=\frac{5}{9}$ e $y=-\frac{7}{9}$.

Método de reducción: Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo:

Para resolver por reducción el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$ puede procederse como sigue:

1) Se multiplica la segunda ecuación por 2: $\begin{matrix} \\ 2\cdot E2 \end{matrix}\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 6x+2y=2 \end{cases}$.

2) Se suman ambas ecuaciones término a término. Se obtiene: $10x=10 \Rightarrow x=1$.
3) Ese valor, $x = 1$, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones. Se obtiene $y = –2$.

Observaciones:
1) Un sistema puede resolverse por cualquiera de los métodos indicados. En los sistemas lineales el método más eficaz suele ser el de reducción; los sistemas no lineales, generalmente hay que resolverlos por sustitución.
2) Si un sistema no viene dado en su forma estándar lo primero que debe hacerse es transformar y ordenar sus ecuaciones. Para ello habrá que trasponer términos, quitar denominadores…

Ejemplos:

a) El sistema [1]: $\begin{cases} x-8=3y \\ y-2x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=8 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$.

b) El sistema [2]: $\begin{cases} x-\frac{y}{3}=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{3y}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3\cdot E1 \\ 10\cdot E2 \end{matrix}\begin{cases} 3x-y=9 \\ 5x+6y=10 \end{cases}$. (Se ha multiplicado la primera ecuación por 3 y la segunda por 10).

Pequeños retos

1. Los sistemas que siguen ya han resueltos más arriba. Vuelve a resolverlos por el método que se indica y comprueba que la solución es la misma.

a) $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases} \rightarrow$ por reducción. b) $\begin{cases} 4x-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases} \rightarrow$ por sustitución.

2. Resuelve los sistemas del ejemplo anterior ([1] y [2]) por el método que prefieras.

Soluciones:

2. a) $x = –1$; $y = –3$. b) $x=\frac{64}{23}$; $y=-\frac{15}{23}$.