ECUACIONES: QUÉ SON Y CÓMO SE RESUELVEN

Definiciones previas
Una ecuación es una igualdad en la que aparecen números y letras ligados mediante las operaciones algebraicas.
En las ecuaciones las letras se llaman incógnitas. Las incógnitas suelen designarse por las letras *x*, *y*, *z*…

- Soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que cumplen la igualdad.
- Las ecuaciones que tienen solución se llaman compatibles; si no tienen solución, incompatibles.
- Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Ejemplos:
a) $2x-14=0$ es una ecuación de primer grado. Su solución es $x = 7$, pues $2 \cdot 7 - 14 = 14 - 14 = 0$.
Las ecuaciones $2x-14=0$ y $3x-21=0$ son equivalentes, pues tienen la misma solución.

b) La ecuación $x^2+4=0$ no tiene soluciones reales, pues la suma de dos números positivos nunca puede dar 0. (El lector recordará que $x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4 \rightarrow$ pero un número al cuadrado no puede dar un resultado negativo).

c) $x^3-3x=2$ es una ecuación de tercer grado. Una de sus soluciones es $x = -1$, pues $(-1)^3-3\cdot(-1)=-1+3=2$.
El valor $x = 1$ no es solución de esa ecuación, pues al sustituir *x* por 1 no se cumple la igualdad.
En cambio, $x = 2$ es otra de sus soluciones.
(Una ecuación de tercer grado puede tener hasta tres soluciones reales diferentes).

d) $2^{x-1}=8$ es una ecuación exponencial. Su solución es $x = 4$, pues $2^{4-1}=2^3=8$.

e) $2-\log x=0$ es una ecuación logarítmica. Su solución es $x = 100$, pues $\log 100 = 2$.

f) Las expresiones x^2+5x+6 o $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ no son ecuaciones, pues no son igualdades.

g) La ecuación $\dfrac{4x-2}{2}=2x-1$ es una identidad: se cumple para cualquier valor de *x*. Puedes comprobarlo (hazlo) cuando $x = 2, 5, 9, \ldots$, y para cualquier valor que tú decidas.

- En las ecuaciones pueden aparecer expresiones polinómicas, racionales, con raíces, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas…; esto hace que los métodos y herramientas de resolución sean variados, pero las claves son siempre las mismas.

Claves para resolver una ecuación:

- Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones. Para ello, generalmente, hay que transformar la ecuación inicial en otra equivalente más sencilla, de manera que encontrar su solución sea fácil.

- Las transformaciones que pueden hacerse en una ecuación dependen de su naturaleza, pero en todos los casos hay que asegurar que la cadena de igualdades sea cierta: cada paso debe ser posible y estar bien dado. Para ello siempre hay que tener en cuenta las reglas de transformación de igualdades. Algunas de estas reglas son:

- Si A = B entonces:

  A + n = B + n A – n = B – n A · n = B · n A **:** n = B **:** n, si n ≠ 0

Aquí A, B y n son números o expresiones algebraicas.
Estas propiedades permiten hacer las transformaciones más usuales:
1) Sumar el mismo número (la misma cosa) a los dos miembros de la igualdad.
2) Multiplicar (o dividir) por un mismo número los dos miembros de la igualdad.

Ejemplos:
a) La ecuación $2x-3=x+7$ puede trasformarse como sigue:
→ Se suma 3 a cada miembro → $2x-3=x+7 \Leftrightarrow 2x-3+3=x+7+3 \Rightarrow 2x=x+10$
→ Se resta x a cada miembro → $2x-x=x+10-x \Leftrightarrow x=10$.
Así se consigue despejar la *x*; esto es, determinar su solución. En este caso, $x=10$.
b) La ecuación $\dfrac{x-2}{5}=1$ se transforma así:
→ Se multiplica por 5 cada miembro ⇒ $\dfrac{x-2}{5}\cdot 5=1\cdot 5 \Leftrightarrow x-2=5$ (así se elimina el denominador del primer miembro)
→ Se suma 2 a cada miembro → $x-2+2=5+2 \rightarrow x=7$.
La solución de la ecuación es $x=7$.

- Si A = B, entonces: $A^2 = B^2$. → La recíproca no siempre es cierta: Si $A^2 = B^2$, no puede asegurarse que A = B. Por ejemplo, es evidente que de $2^2=(-2)^2$, que es cierto, no puede deducirse que 2 = –2.

→ Al transformar una igualdad haciendo el cuadrado de sus dos miembros pueden ganarse soluciones, no válidas en la igualdad inicial. Por tanto, si se hace esa transformación deben comprobarse las soluciones halladas. (Otro inconveniente de hacer el cuadrado estriba en los frecuentes errores de cálculo que se cometen).
→ En sentido contrario, cuando se simplifica una ecuación pueden perderse soluciones.

Ejemplos:
a) Si se tiene la ecuación $\sqrt{2x-1}=3 \Rightarrow \left(\sqrt{2x-1}\right)^2=3^2 \Rightarrow 2x-1=9$, cuya solución es x = 5.
b) De $x-1=\sqrt{2x+1} \Rightarrow (x-1)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \Rightarrow x^2-2x+1=2x+1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x$ = 0 o 4.
La solución x = 0 no es válida en la ecuación de partida. Sí lo es x = 4: esa será la solución.
c) De $x(2x+6)=2x(x+1)$, si se divide por x miembro a miembro ⇒ $(2x+6)=2(x+1) \Rightarrow$ $2x+6=2x+1 \Rightarrow 6=1$, que es absurdo. En cambio, la ecuación inicial admite la solución x = 0.

- Si A = B ⇒ log A = log B; $a^A = a^B$; sen A = sen B; …

→ Estas transformaciones se harán cuando lo pida la naturaleza de la ecuación.

- Si A = B ⇔ B = A ⇔ –A = –B ⇔ –B = –A.

→ Estas obviedades causan frecuentes problemas. Por ejemplo de $-2=-x$ o de $-3=x$ algunos estudiantes dudan y no se atreven a escribir:
$-2=-x \Leftrightarrow 2=x \Leftrightarrow x=2$; $-3=x \Rightarrow x=-3$

- Si A · B = 0 ⇒ A = 0 o B = 0.

→ La transformación de la ecuación inicial en la forma $E(x)=0$ o mejor, si es posible, en la forma $A(x)\cdot B(x)=0$, suele facilitar su resolución.