DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL

La mayoría de estos problemas han sido propuestos en exámenes de selectividad de los distintos distritos universitarios españoles.

1. Considérese una población en la que se estudia una característica X que sigue una distribución normal de media $\mu = 12$ y varianza $\sigma^2 = 16$. Se pide:

a) Probabilidad de que un elemento de esa población, elegido al azar, tenga la característica superior a 14.

b) Considérese una muestra aleatoria de tamaño $n = 9$. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ tenga un valor superior a 14? $\left(\overline{X} \in N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right)$

Solución:

a) La distribución es normal N(12, 4). La desviación típica, $\sigma = 4$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$, luego:

$$P(X > 14) = P\left(Z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 0,5) = 1 - P(Z < 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

b) Las medias muestrales de tamaño n se distribuyen según la normal $\left(\overline{X} \in N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

En este caso: $N\left(12, \dfrac{4}{\sqrt{9}}\right) \to$ N(12, 4/3)

Por tanto:

$$P(\overline{X} > 14) = P\left(Z > \frac{14-12}{4/3}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

2. En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan un día concreto. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos?

b) ¿Cuál es la distribución de la media muestral, si se toman muestras aleatorias de 64 clientes? Especificar sus parámetros.

Solución:

a) Las muestras de tamaño *n* obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, N(μ. σ), se distribuye según una normal $N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En nuestro caso, para n = 25 y N(10, 2), las muestras se distribuyen según la N(10, 2/5).
Con esto,

$$P\left(\overline{X} < 9\right) = P\left(Z < \frac{9-10}{2/5}\right) = P(Z < -2,5) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$$

b) Como hemos indicado anteriormente, la distribución de medias muestrales de tamaño 64 se distribuye según la normal $N\left(10,\ \frac{2}{\sqrt{64}}\right) \to$ N(10, 0,25).

Esto es, una normal de media 10 y desviación típica 0,25.

3. La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.
a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

Solución:
La población se distribuye como una normal de media μ = 35 y desviación típica σ = 5.

a) Las muestras de una población N(μ, σ) se distribuyen según la normal de media $\overline{X}$ = μ y desviación típica $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo *n* el tamaño muestral.

Por tanto, $\overline{X}$ = 35 y $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{5}{\sqrt{100}} = \dfrac{1}{2}$. Luego, la varianza será $\left(\sigma_{\overline{X}}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

b) Esta distribución se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{\sigma / \sqrt{n}}$. Para este caso, $Z = \dfrac{X - 35}{1/2}$.
Con esto, con ayuda de la tabla normal, se tiene:

$$P(36 < \overline{X} < 37) = P\left(\frac{36-35}{1/2} < Z < \frac{37-35}{1/2}\right) = P(2 < Z < 4) = P(Z < 4) - P(Z < 2) =$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$$

4. La duración de las baterías de un determinado modelo de teléfono móvil tiene una distribución normal de media 34,5 horas y desviación típica 6,9 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 teléfonos móviles.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 32 y 33,5 horas.
b) ¿Y de que sea mayor de 38 horas?

Solución:
La media de las muestras de tamaño *n* obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, N(μ. σ), se distribuye según una normal $\mathrm{N}\left(\mu,\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En nuestro caso (μ = 34,5, σ = 6,9, n = 36), se distribuirán según la normal

$$N\left(34{,}5,\ \frac{6{,}9}{\sqrt{36}}\right) \Leftrightarrow N(34{,}5,\ 1{,}15)$$, que se tipifica haciendo $Z = \dfrac{\overline{X} - 34{,}5}{1{,}15}$

Con esto,

a) $$P(32 < \overline{X} < 33{,}5) = \mathrm{P}\left(\frac{32-34{,}5}{1{,}15} < Z < \frac{33{,}5-34{,}5}{1{,}15}\right) = \mathrm{P}(-2.17 < Z < -0{,}87) =$$
$$= \mathrm{P}(Z < -0{,}87) - \mathrm{P}(Z < -2{,}17) = 1 - 0{,}8078 - (1 - 0{,}9850) = 0{,}1772$$

b) $$P(\overline{X} > 38) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{38-34{,}5}{1{,}15}\right) = \mathrm{P}(Z > 3{,}04) = 1 - 0{,}9988 = 0{,}0012$$

5. En cierta población humana, la media muestral $\overline{X}$ de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que $\overline{X}$ sea menor o igual que 75 es 0,58 y la de que $\overline{X}$ sea mayor que 80 es 0,04. Hallar la media y la desviación típica de $\overline{X}$. (Tamaño muestral n = 100).

Solución:
Las muestras de media $\overline{X}$ y desviación típica σ se distribuyen según la normal de media $\overline{X}$ y desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica de la población y n el tamaño muestral.

Esta distribución se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}$, que para n = 100 es $Z = \dfrac{X - \overline{X}}{\sigma/10}$.

Con esto, a partir de los datos, y con ayuda de la tabla normal, se tiene:

$$P(\overline{X} < 75) = 0{,}58 \Rightarrow P\left(Z < \frac{75-\overline{X}}{\sigma/10}\right) = 0{,}58 \Rightarrow \frac{75-\overline{X}}{\sigma/10} = 0{,}20$$

$$P(\overline{X} > 80) = 0{,}04 \Rightarrow P\left(Z > \frac{80-\overline{X}}{\sigma/10}\right) = 0{,}04 \Rightarrow \frac{80-\overline{X}}{\sigma/10} = 1{,}75$$

Resolviendo el sistema

$$\frac{75-\overline{X}}{\sigma/10} = 0{,}20;\ \frac{80-\overline{X}}{\sigma/10} = 1{,}75 \Leftrightarrow \begin{cases} 750 - 10\overline{X} = 0{,}20\sigma \\ 800 - 10\overline{X} = 1{,}75\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\overline{X} + 0{,}20\sigma = 750 \\ 10\overline{X} + 1{,}75\sigma = 800 \end{cases}$$

se obtiene: $\overline{X}$ = 74,35 y σ = 32,26.

Por tanto la desviación típica de la variable $\overline{X}$ es 3,226.

6. Se sabe que el peso de los recién nacidos en una determinada población sigue una distribución normal de media 3600 g y desviación típica 280 g. Se toma una muestra al azar de 196 de estos recién nacidos y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté ente 3580 y 3620?

Solución:
La distribución de la media muestral de tamaño n obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, N(μ , σ), se distribuye según una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En este caso, la población es N(3600, 280), luego las medias muestrales de tamaño 196 se distribuyen según la normal: $N\left(3600, \dfrac{280}{\sqrt{196}}\right)$. → N(3600, 20)

Con esto,

$$P(3580 < \bar{x} < 3620)) = P\left(\frac{3580-3600}{20} < Z < \frac{3620-3600}{20}\right) = P(-1 < Z < 1) =$$

$$= P(Z < 1) - P(Z < -1) = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$$

7. Se supone que la longitud de los recién nacidos de una determinada población sigue una distribución normal de media 50 cm y desviación típica 6 cm. Se toma una muestra al azar de 144 de esos recién nacidos y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 49 y 51 cm?

Solución:
La distribución de la media muestral de tamaño *n* obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, N(μ , σ), se distribuye según una normal $N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En este caso, la población es N(50, 6), luego las medias muestrales de tamaño 144 se distribuyen según la normal: $N\left(50,\ \frac{6}{\sqrt{144}}\right) \to$ N(50, 0,5)

Con esto,

$$P\left(49 < \bar{x} < 51\right) = P\left(\frac{49-50}{0,5} < Z < \frac{51-50}{0,5}\right) = P(-2 < Z < 2) =$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < -2) = 0,9772 - (1 - 0,9772) = 0,9544$$

8. Una fábrica de coches lanza al mercado el modelo “Mathe” del que se sabe que sus pesos siguen una distribución normal de media 3100 kilos y una desviación típica de 130 kilos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al comprar un coche Mathe, pese más de 3.130 kilos?
b) ¿Qué distribución seguirán las muestras de tamaño 100 de coches Mathe?
c) Cuál será la probabilidad de que al comprar un coche pese más de 2900 kilos y menos de 3500?

Solución:
La distribución es N(3100, 130).

a) $P(X > 3130) = P\left(Z > \frac{3130-3100}{130}\right) = P(Z > 0,23) = 1 - 0,5910 = 0,4090$.

b) La distribución de la media muestral de tamaño *n* obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, se ajusta a la normal $N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En este caso: $N\left(3100,\ \frac{130}{\sqrt{100}}\right) \to$ N(3100, 13)

c) $$P(2900 < X < 3500) = P\left(\frac{2900-3100}{130} < Z < \frac{3500-3100}{130}\right) = P(-1,58 < Z < 3,08) =$$
$$= P(Z < 3,08) - P(Z < -1,58) = 0,9990 - (1 - 0,9429) = 0,9419.$$