PROBLEMAS DE INTEGRALES DEFINIDAS

1. Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx$$

Solución:
Descomponiendo la expresión del integrando:

$$\frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Por tanto:

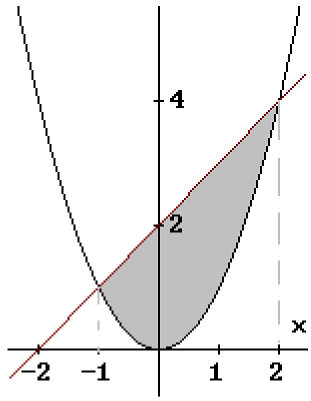
$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}dx = \int_0^3 \left(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx = \left(x+2\sqrt{x+1}\right)\Big|_0^3 = 3+4-2=5$$

NOTA: La integral $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ es inmediata, pues

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1}+c$$

2. Calcula el área encerrada entre las gráficas de la recta y = x + 2 y la parábola $y = x^2$

Solución:
El área encerrada entre ambas curvas es la sombreada en la figura adjunta.
La parábola y la recta se cortan en las soluciones del sistema $\begin{cases} y = x+2 \\ y = x^2 \end{cases}$, que son (–1, 1) y (2, 4); puntos de abscisas x = –1 y x = 2.



Por tanto, el área pedida viene dada por la integral

$$A = \int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 2+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}$$

3. Dibuja la función $f(x)=3x^2-x^3$. Encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre x = –1 y x = 2.

Solución:

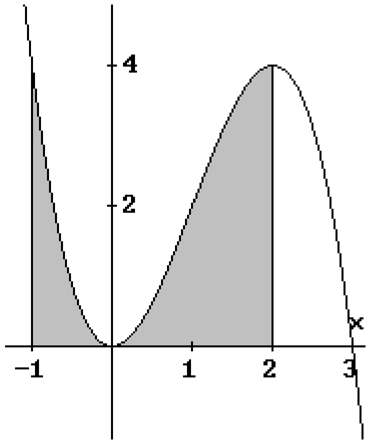
$$f(x)=3x^2-x^3 \;\Rightarrow\; f(x)=6x-3x^2=3x(2-x) \;\Rightarrow\; f''(x)=6-6x$$

La derivada primera se anula en x = 0 o x = 2. Luego:

- si x < 0, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece
- si 0 < x < 2, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ crece $\Rightarrow$ en x = 0 hay un mínimo.
- si x > 2, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ decrece $\Rightarrow$ en x = 2 hay un máximo.

La derivada segunda sea anula en x = 1, luego:

- si x < 1, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa ($\cup$)
- si x > 0, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava ($\cap$) $\Rightarrow$ en x = 1 hay punto de inflexión



La curva corta a los ejes en los puntos (0, 0) y (3, 3). Dando otros valores,{(–1, 4); (1, 2); (2, 4); (4, –16)}, puede trazarse la gráfica pedida.

El área pedida es la sombreada en la figura. Su valor es:

$$A = \int_{-1}^{2} (3x^2 - x^3)dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = 8 - 4 - \left(-1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{4}$$

---

4. Dibuja la función $f(x) = 27 - x^3$, y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre x = –3 y x = 5.

Solución

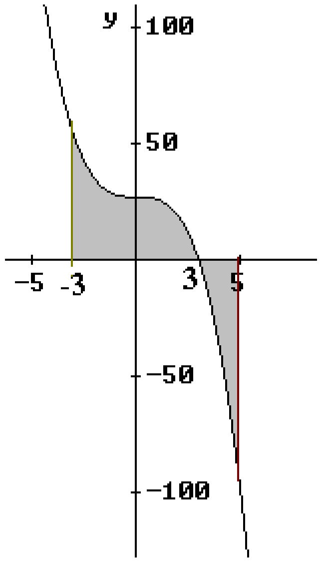
$f(x) = 27 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x$

Como $f'(x) < 0$ para todo x, la función es siempre decreciente. En x = 0 tiene un punto de inflexión, siendo convexa ($\cup$) si x <0 y cóncava ($\cap$) cuando x > 0.

Cortes con los ejes:

si x = 0, $f(0) = 27 \rightarrow$ punto (0, 27)

si y = 0, $0 = 27 - x^3$, x = 3 $\rightarrow$ punto (3, 0)



Dando otros valores: (–2, 35); (1, 26); (2, 19); (4, –37), se obtiene la figura adjunta.

El área pedida es:

$$A = \int_{-3}^{3} (27 - x^3)dx - \int_{3}^{5} (27 - x^3)dx =$$

$$= \left(27x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-3}^{3} - \left(27x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{3}^{5} = 162 + 82 = 244$$

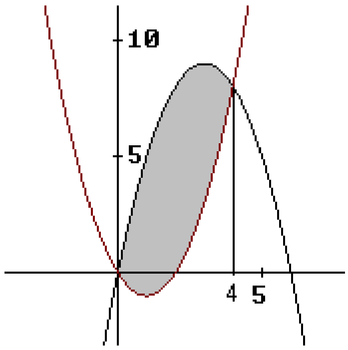
---

5. Halla el área del recinto limitado por las parábolas de ecuaciones respectivas

$y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Solución:

El área pedida es la del recinto sombreado en la figura.



Los puntos de corte de ambas parábolas vienen dados por la solución del sistema

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow\ 6x - x^2 = x^2 - 2x\ \Rightarrow\ 2x(x-4) = 0\ \Rightarrow x = 0,\ x = 4.$$

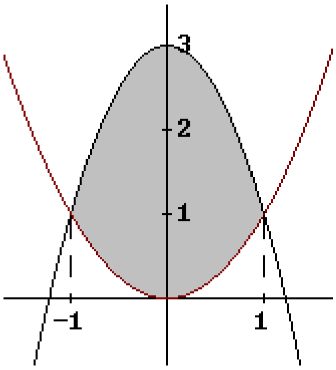
El área vale:

$$A = \int_0^4 \left(6x - x^2 - (x^2 - 2x)\right)dx = \int_0^4 \left(8x - 2x^2\right)dx = \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}$$

---

6. Hallar el área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.

Solución:
La región es la sombreada en la siguiente figura.



Las curvas se cortan en los puntos (−1, 1) y (1, 1), que son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases}$$

Como $y = x^2$ va por debajo de $y = -2x^2 + 3$ en el intervalo (−1, 1), el área viene dada por:

$$A = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 3 - x^2)dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)dx = \left(-x^3 + 3x\right)\Big|_{-1}^{1} = 2 - (-2) = 4$$

---

7. Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$$

Solución:

Tomamos $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

Luego, $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$

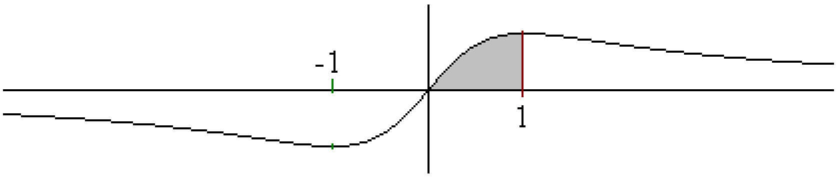
Por tanto, $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$

8. Calcula el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ y el eje OX, entre las abscisas 0 y 1.

Solución:
Como la función es positiva para x > 0, el área pedida es viene dada por la integral

$$A = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

NOTA: Aunque no sea necesario, es bueno hacer un esbozo de su gráfica. En ella indicamos, sombreada, la región de la que se pide



9. Halla el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$ y las rectas y = 0, x = 1 y x = 3.

Solución:
Nos interesa saber si la curva está por encima o por debajo del eje OX en el intervalo que nos afecta. Para ello estudiamos el signo de la función.

Si descomponemos en factores se tiene:

$$f(x)=x^3-4x^2+5x-2 = (x-1)^2(x-2)$$

Habría que observar que x = 1 es una raíz de la función; dividiendo por Ruffini se obtiene los otros factores.
Por tanto:

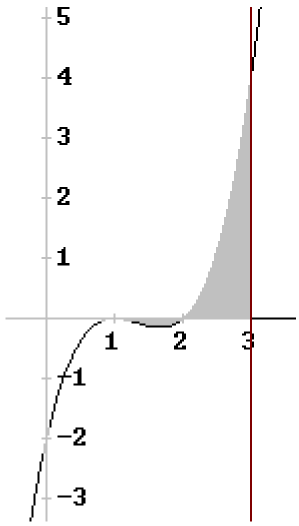
la función corta al eje en x = 1 y en x = 2
si x < 2, f(x) ≤ 0
si x > 2, f(x) > 0.

Con esto basta para saber que el recinto entre la recta y = 0, y entre x = 1 y x = 2, está por debajo del eje OX. Análogamente, el recinto correspondiente al intervalo (2, 3) está por encima del eje OX.
En consecuencia, el área buscada viene dada por:

$$A=-\int_1^2 (x^3-4x^2+5x-2)dx+\int_2^3 (x^3-4x^2+5x-2)dx =$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-2x\right]_2^3 =$$

$$= -\left(-\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}$$



NOTA. Aunque no es necesario hacer la gráfica es conveniente hacerla para visualizar mejor el problema.