PROBLEMAS DE DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Preguntas de tipo test

1. (M13) El valor propio correspondiente al autovector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ es:

a) $\lambda = -1$ b) $\lambda = 4$ c) $\lambda = 1$

Solución:

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{v},$$

por tanto, $\vec{v}$ es autovector de la matriz A (con autovalor –1).

La respuesta es a)

2. El valor propio correspondiente al autovector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es:

a) $\lambda = 1$ b) $\lambda = 2$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{v}$$, por tanto, v es autovector de la matriz A (con autovalor $\lambda = 1$).

La respuesta es a)

3. (J04) La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Es diagonalizable y su matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) No es diagonalizable.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$$

los autovalores son $\lambda = 3$ y $\lambda = -1$.

Si $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x = t;\ y = t\} \rightarrow$ autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x = t;\ y = -3t\} \rightarrow$ autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

La matriz de paso será: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

La respuesta es c)

4. (P11) Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector asociado al autovalor λ de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ a & 5 & 4 \\ b & 0 & 5 \end{pmatrix}$, entonces debe cumplirse que:

a) $\lambda = -1$, $a = 0$ y $b = 0$. b) $\lambda = 5$, $a = 2$ y $b = 0$.

c) Ninguna de las anteriores: λ = ___, a = ___, b = ___.

Solución:

Se debe cumplir que $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ a & 5 & 4 \\ b & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -10 \\ -2a+4 \\ -2b+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$.

La respuesta es b)

5. (J10) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ tiene 2 autovalores distintos y reales si:

a) x e y tienen igual signo b) siempre c) Sólo si $x = y$

Solución:

El determinante $\begin{vmatrix} -\lambda & x \\ y & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - xy \Rightarrow \lambda = \sqrt{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ y con el mismo signo. Los dos valores solución de lambda son opuestos y reales.

La respuesta es a)

6. (M13) El vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ es un autovector de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ asociado al autovalor 4, cuando:

a) $a = b = 0$. b) $a = 4$ y b cualquiera. c) $\vec{v}$ nunca es autovector de la matriz A.

Solución:

Si $\vec{v}$ es autovector de la matriz A, entonces:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -4+5a \\ 4b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow -8 = -2\lambda \Rightarrow \lambda = 4$$

Por tanto:

- $-4 + 5a = 4a \Rightarrow a = 4$.
- $4b = 4b$, que se cumple para cualquier valor de b.

La respuesta es b)

Nota: Los autovalores de la matriz dada son $\lambda = 4$, doble; y $\lambda = 5$.

Para $\Rightarrow = 4$, los autovectores son de la forma: $\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ h \end{pmatrix}$. Suelen elegirse los más sencillos, que son: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pero también valdría $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ b \end{pmatrix}$, para $t = -2$ y $h = b$.

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$ es un autovector de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & p \end{pmatrix}$:

a) Si $p = -1$. b) Si $p = 1$. c) Si p = 0.

Solución:

Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$ es un autovector de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & p \end{pmatrix}$, se cumple $\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ -2 & 0 & p-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

y por tanto se cumple: $\begin{cases} -\lambda - p = 0 \\ 3 - 3p = 0 \\ -2 + (p-\lambda)p = 0 \end{cases}$. De aquí se deduce que p =1, y que □ = -1.

La respuesta es b)

8. (S08) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} p & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Uno de los autovectores es (1, 0, 0).
b) El producto de los autovalores es 0.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Autosistema: $\begin{vmatrix} p-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (p-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) = 0$

Autovalores: $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ y $\lambda = p$. El producto de sus autovalores es 0.

La respuesta es b)

9. (S06) Los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ son 2, 3 y 4:

a) Sólo si $a = b = 0$.
b) Para cualquier valor de a y b.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & a & 0 \\ 0 & 3-\lambda & b \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ si: $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ o $\lambda = 4$, independientemente de los valores de a y b.

La respuesta es b)

10. La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & p & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ es diagonalizable:

a) Siempre, para todo p. b) Sólo si $p \neq \pm 1$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Valores propios son: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ y $\lambda = p$.

- Si $p \neq \pm 1$, los valores propios son diferentes y la matriz diagonalizable.
- Si $p = 1$, $\lambda = 1$ es doble y el rango de $A-\lambda I=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=2 \Rightarrow$ multiplicidad geométrica es 1. El sistema $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ tiene un grado de indeterminación.
- Si $p = -1$, $\lambda = -1$ es doble y el rango de $A-\lambda I=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1 \Rightarrow$ multiplicidad geométrica es 2. El sistema $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ tiene dos grados de indeterminación. Por tanto, en este caso la matriz es diagonalizable.

La respuesta es c)

11. (J09) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & p & p\\ -1 & q & 2\\ 3 & p & -4\end{pmatrix}$, si se sabe que al valor propio $\lambda = 1$ le corresponde el vector propio $\vec{v}_1 = (3, -1, 3)$, entonces:

a) $p = -6$; $q = 4$. b) $p = 0$; $q = -1$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\begin{pmatrix}5 & p & p\\ -1 & q & 2\\ 3 & p & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}15+2p\\ -q+3\\ -3-p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 3\end{pmatrix} \Rightarrow p=-6;\ q=4$$

La respuesta es a)

12. (J04) El valor propio correspondiente al autovector $\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$ de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ es:

a) $\lambda = -1$. b) $\lambda = 4$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda=-1$$

La respuesta es a)

13. (J08) La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ es diagonalizable:

a) Sólo si $p = 2$. b) Para cualquier $p \neq 2$.
c) Ninguna de las anteriores.
<u>Solución</u>:
Autosistema: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & p-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(p-\lambda) = 0$
Autovalores: $\lambda = 2$ y $\lambda = p$.
Si $p \neq 2$, los autovalores son diferentes y la matriz A es diagonalizable.
Si $p = 2$, $\lambda = 2$ es doble. En este caso los autovectores se obtienen resolviendo:
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$
Como la multiplicidad geométrica es 1 y la algebraica 2, la matriz no es diagonalizable.
La respuesta es b)

14. (J07) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, si para el autovalor λ su autovector asociado es $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces:

a) $a = 0$ y $\lambda = 1$. b) $a = 3$ y $\lambda = 3$.
c) Ninguna de las anteriores: $a =$ __ y $\lambda =$ __ .
<u>Solución</u>:
Debe cumplirse que $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+2a \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 3$ y $a = 3$.
La respuesta es b)

15. (J01) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es diagonalizable:

a) Siempre, para todo *p*. b) Sólo si $p \neq 1$ y $p \neq 4$.
c) Ninguna de las anteriores.
<u>Solución</u>:
Valores propios son: $\lambda = 1$, $\lambda = 4$ y $\lambda = p^2$.

- Si $p \neq -1, 1, -2, 2$, los valores propios son diferentes y la matriz diagonalizable.
- Si $p = 1$, $\lambda = 1$ es doble y rango de $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ multiplicidad geométrica

es 2. El sistema $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene dos grados de indeterminación.

- Sucede lo mismo cuando $\lambda = -1$, $\lambda = -2$ y $\lambda = 2$

Luego, la matriz es diagonalizable siempre.
La respuesta es a)

16. (J05) El autovalor asociado al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ es:

a) $\lambda = 1$ b) $\lambda = 0$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1$$

La respuesta es a)

17. (J06) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, la matriz ortogonal U que diagonaliza a A es:

a) $U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ b) $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2;\ \lambda = -3.$$

Para $\lambda = 2$: $v_1 = (2, 1) \to$ unitario $\left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)$

Para $\lambda = -3$: $v_2 = (1, -2) \to$ unitario $\left(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}\right)$.

La respuesta es a)

18. (J08) La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ es diagonalizable:

a) Sólo si $p = 2$.
b) Para cualquier $p \neq 2$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Autosistema: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & p-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(p-\lambda) = 0$

Autovalores: $\lambda = 2$ y $\lambda = p$.

Si $p \neq 2$, los autovalores son diferentes y la matriz A es diagonalizable.

Si $p = 2$, $\lambda = 2$ es doble. En este caso los autovectores se obtienen resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$$

Como la multiplicidad geométrica es 1 y la algebraica 2, la matriz no es diagonalizable.

La respuesta es b)

Problemas

1. (1 punto) (J13) Diagonaliza, si ello es posible, la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ (Determina las matrices D y P)

<u>Solución</u>:

El polinomio característico es $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 2 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda)$.

→ Los valores propios son: $\lambda = 1$, $\lambda = -2$ y $\lambda = -1$.

- Para $\lambda = 1$, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2y=0\\ -3y=0\\ 2x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=t\end{cases}\to \text{Vector propio: } \vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

- Para $\lambda = -2$, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0\\ 2x-y+3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2t\\ y=t\\ z=5t/3\end{cases}\to \text{Vector propio: } \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-6\\ 3\\ 5\end{pmatrix}.$$

- Para $\lambda = -1$, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2y=0\\ -y=0\\ 2x-y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=-t\end{cases}\to \text{Vector propio: } \vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$; y la matriz $P=\begin{pmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

2. (M13) (1 punto) Dada $A=\begin{pmatrix}3 & p\\ 0 & p\end{pmatrix}$, estudia, según los valores de p, si A es diagonalizable, y diagonalízala (es decir, calcula las matrices D_A y P_A) en el caso $p = 2$.

<u>Solución</u>:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & p\\ 0 & p-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(p-\lambda)=0 \Rightarrow \text{los autovalores son: 3 y } p.$$

- Si $p = 3$, el autovalor $\lambda = 3$ es doble y el rango de $(B-3I)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ es 1.

Luego la multiplicidad geométrica de la solución del autosistema es 1. Por tanto, para $p = 3$, la matriz B no puede diagonalizarse.

- Si $p = 2$, los autovalores $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$ son simples, y la matriz B es diagonalizable.

En este caso:

Para $\lambda = 3$, el autosistema es $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2y=0\\ -y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}$

Para $\lambda = 2$, el autosistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$

Por tanto, $D_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $P_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (M12) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$

a) (1 puntos) Estudia para qué valores del parámetro a es diagonalizable.
b) (1,5 punto) Para $a = 2$ halla la matriz de paso P y la matriz diagonal D. Calcula también P^{-1} y comprueba que $A = PDP^{-1}$.
Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & a & a-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda) = 0 \Rightarrow$ los autovalores son: 3, −1 y a.

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -1$ la matriz es diagonalizable, pues los tres autovalores serían distintos.
- Si $a = 3$, el autovalor $\lambda = 3$ es doble y el rango de $(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es 2.

Luego la multiplicidad geométrica de la solución del autosistema es 1.
Por tanto, para $a = 3$, la matriz A no puede diagonalizarse.

De otra forma:

Si $\lambda = a = 3$, el autosistema es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2z = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Por tanto no es diagonalizable: multiplicidad algebraica = 2; multiplicidad geométrica = 1.

- Si $a = -1$, el autovalor $\lambda = -1$ es doble y el rango de $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es 2.

Tampoco es diagonalizable: multiplicidad algebraica = 2; multiplicidad geométrica = 1.

b) Para $a = 2$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Sus autovalores son: 3, −1 y 2.

- Si $\lambda = 3$, el autosistema es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2z = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \to \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z = 0 \end{cases}$.

• Si $\lambda=-1$, el autosistema es $\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}4x+2z=0\\ 2y+3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-t/2\\ y=(-3/2)t\\ z=t\end{cases}\to$

(haciendo $t=2$) $\to\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$.

• Si $\lambda=2$, el autosistema es $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2z=0\\ -3y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2t\\ y=0\\ z=t\end{cases}\to$

$\to\ \vec{v}_3=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

La matriz diagonal es: $D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

La matriz de paso $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $\to$ Hasta aquí, 0,75 puntos

$\to$ Cálculo de la inversa y multiplicación de matrices, 0,75 puntos

Inversa: $P^{-1}=\dfrac{(P_{ij})^t}{|P|}=\dfrac{1}{(-3)}\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1/3 & 0\\ 0 & 2/3 & 1\end{pmatrix}$

Se cumple que $A=PDP^{-1}$.

4. (J11) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & a\\ 3 & 0 & a\end{pmatrix}$.

a) (1 puntos) Estudia para qué valores del parámetro a es diagonalizable.
b) (1,5 punto) Para $a = 1$ halla la matriz de paso P y la matriz diagonal D.
c) (0,5 puntos) Calcula también P^{-1} y comprueba que $A=PDP^{-1}$.

<u>Solución</u>:

a) $\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -2-\lambda & a\\ 3 & 0 & a-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-2-\lambda)(a-\lambda)=0\Rightarrow$ los autovalores son: 2, –2 y a.

• Si $a\neq 2$ y $a\neq -2$ la matriz es diagonalizable, pues los tres autovalores serían distintos.

• Si $a = 2$, el autovalor $\lambda = 2$ es doble y el rango de $(A-2I)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ es 2 para todo valor de a. Por tanto A no puede diagonalizarse.

<u>De otra forma</u>:

Si λ = a = 2, el autosistema es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4y + 2z = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

Por tanto no es diagonalizable, pues la multiplicidad algebraica del autovalor es 2 pero la multiplicidad geométrica es 1.

- Si a = –2, el autovalor λ = –2 es doble y el rango de $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es 2 para todo

valor de a. Tampoco es diagonalizable.

b) Para a = 1, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sus autovalores son: 2, –2 y 1.

- Si λ = 2, el autosistema es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t/4 \\ z = 3t \end{cases} \to$

$\to \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- Si λ = –2, el autosistema es $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \to \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Si λ = 1, el autosistema es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 3t \end{cases} \to$

$\to \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La matriz diagonal es: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) Inversa: $P^{-1} = \dfrac{(P_{ij})^t}{|P|} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & -4 \\ -12 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & -1/3 \\ -1 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Se cumple que $A = PDP^{-1}$.

5. (J10) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Estudie para qué valores de los parámetros a y b es diagonalizable.
b) (1 punto) Halle la matriz de paso P para $b = 0$ y a cualquier valor.

<u>Solución</u>:

a) $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & b \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda) = 0$ y los autovalores son: 5, –1 y a.

- Si $a \neq 5$ y $a \neq -1$ la matriz es diagonalizable.
- Si $a = 5$, el autovalor 5 es doble y el rango de $(A-5I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es 2 para todo valor de a.

Por tanto A no puede diagonalizarse.

- Si $a = -1$, el autovalor –1 es doble y el rango de $(A+I) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es 1 si $b = 0$; y 2, si $b \neq 0$.

Luego la matriz se diagonaliza si $a = -1$ y $b = 0$.

b) Para $b = 0$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$. Sus autovalores son: 5, –1 y $a \neq 5$.

El autovalor $\lambda = 5$ nos da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & a-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6y = 0 \\ 3x + (a-5)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (5-a)t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}. \text{ Si } t = 1,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5-a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

El autovalor $\lambda = -1$ da:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 3x + (a+1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Si } n = 1,\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Si a tomase el valor –1, la solución sería $\begin{cases} x = 0 \\ y = n \\ z = h \end{cases} \to$ se obtendrían dos vectores: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

El autovalor $\lambda = a$ da:

$$\begin{pmatrix} 5-a & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (5-a)x = 0 \\ (-1-a)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}. \text{ Si } p = 1,\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(De nuevo se tendría el caso $a = -1$, con el mismo resultado dado.)

Una matriz de paso puede ser $P = \begin{pmatrix} 5-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. (P11) a) (1,25 puntos) Analiza en función de los valores de p la diagonalización de la matriz $A = \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ p & -1 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de un parámetro p.

b) (1,25 puntos) Diagonaliza la matriz A cuando $p = 2$. (Determina las matrices D y P.)

Solución:

El polinomio característico es $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} p-\lambda & p & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ p & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(p-\lambda)$.

$(1-\lambda)(-2-\lambda)(p-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ \lambda = -2$ y $\lambda = p$.

- Los valores propios son: $\lambda = 1$, $\lambda = -2$ y $\lambda = p$.

Observación: Resulta sorprendente el alto porcentaje de alumnos que operan (multiplicando la expresión $(1-\lambda)(-2-\lambda)(p-\lambda) = 0$) para resolver la ecuación anterior. Tal procedimiento indica un ínfimo conocimiento de las ecuaciones, que habitualmente acaba en errores en la solución o soluciones. Conviene recordar que para que un producto sea 0 es necesario y suficiente que alguno de los factores sea 0.

Por tanto:

- Si $p \neq 1$ y -2, los valores propios son diferentes y la matriz será diagonalizable.
- Si $p = 1$, $\lambda = 1$ es doble (multiplicidad algebraica 2).

El autosistema asociado es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ (multiplicidad geométrica 1)

En este caso la matriz no es diagonalizable.

- Si $p = -2$, $\lambda = -2$ es doble (multiplicidad algebraica 2).

El autosistema asociado es $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2y = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t/2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

(multiplicidad geométrica 1).

La matriz A tampoco es diagonalizable cuando $p = -2$.

Luego, la matriz A es diagonalizable siempre que $p \neq 1$ y -2.

b) Si $p = 2$, la matriz es $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ⇒ Los valores propios son: λ = 1, λ = −2 y λ = 2.

- Para λ = 1, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x+y=0\\ -3y=0\\ 2x-y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=t\end{cases} \to \text{Vector propio: } \vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

- Para λ = −2, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4x+2y=0\\ 2x-y+3z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=-2t\\ z=-4t/3\end{cases} \to \text{Vector } p\text{: } \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -4/3\end{pmatrix}\equiv \begin{pmatrix}3\\ -6\\ -4\end{pmatrix}.$$

- Para λ = 2, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2y=0\\ -4y=0\\ 2x-y-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=2t\end{cases} \to \text{Vector propio: } \vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; y la matriz $P=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & -6 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$.

<u>Nota</u>. Aunque no se pide, la matriz $P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-12 & -10 & 6\\ 0 & -1 & 0\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Puede comprobarse que

$PDP^{-1}=A$.

<u>Opción $p = 0$</u>

b) Si $p = 0$, a matriz es $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ⇒ Los valores propios son: λ = 1, λ = −2 y λ = 0.

- Para λ = 1, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x=0\\ -3y=0\\ -y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=t\end{cases} \to \text{Vector propio: } \vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

- Para λ = −2, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x=0\\ -y+3z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=3t\\ z=t\end{cases} \to \text{Vector propio: } \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}.$$

- Para λ = 0, el autosistema asociado es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Vector propio: } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; y la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nota. Aunque no se pide, la matriz $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puede comprobarse que

$PDP^{-1} = A$.

7 . (S09) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & p & p \\ -1 & q & 2 \\ 3 & p & -4 \end{pmatrix}$.

a) (0,5 puntos) Determina p y q sabiendo que al valor propio λ = 1 le corresponde el vector propio $\vec{v}_1 = (3, -1, 3)$.

b) (0,5 puntos) Para los valores de p y q hallados, determina los demás valores propios.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 5 & p & p \\ -1 & q & 2 \\ 3 & p & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 15+2p \\ -q+3 \\ -3-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow p = -6;\ q = 4$

b) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0 \rightarrow$

Autovalores: λ = 1; λ = 2, doble.

8. (S08) (20 puntos) Dada la aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, px+y, px+py+3z)$:

a) Discutir, en función de p, cuando su matriz asociada es diagonalizable.

b) Para $p = 0$ hallar la matriz de paso y A^5.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ p & p & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$

Autovalores: λ = 1, doble; λ = 3, simple.

- Para λ = 1 y $p = 0$ la solución genérica es (α, β, 0) de dimensión dos que coincide con la multiplicidad geométrica del autovalor (una base de autovectores asociados a ese autovalor serían por ejemplo {(1, 0, 0), (0, 1, 0)}), entonces la matriz es diagonalizable.

- Para $\lambda = 1$ y $p \neq 0$ la solución genérica es $(0, -2\beta/p, \beta)$ y de dimensión 1 que no coincide con la multiplicidad geométrica del autovalor que es 2 (una base de autovectores asociados a ese autovalor serían por ejemplo $\{(1, -2/p, 0))$, entonces la matriz NO es diagonalizable.

b) Si $p = 0$ ya tenemos una base de autovectores para $\lambda = 1, \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.
Para $\lambda = 3$ una base de autovectores es, dada la solución genérica $(0, 0, \alpha)$ sería, por ejemplo $(0, 0, 1)$.

Entonces la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$ y, por lo

tanto $A^5 = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}$

9 (1,5 puntos) (S05) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & p^2 & 0 \end{pmatrix}$, discutir razonadamente para qué valores de p es diagonalizable.

Solución:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & p \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & p^2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - p^2\right]$. Autovalores: $\lambda = 1$; $\lambda = p$; $\lambda = -p$

- Si $p \neq 0, -1, 1$ los autovalores son distintos y la matriz diagonalizable.
- Si $p = 0$, $\lambda = 0$ es doble.

Autovectores para $\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Multiplicidad geométrica 1.

La matriz no será diagonalizable.

- Si $p = -1$, $\lambda = 1$ es doble.

Autovectores para $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Multiplicidad geométrica 1.

La matriz no es diagonalizable.

- Si $p = 1$, $\lambda = 1$ es doble.

Autovectores para $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Multiplicidad geométrica 1.

La matriz no es diagonalizable.

Así pues, A es diagonalizable siempre que $p \neq \pm 1, 0$.

10. J08) (2 puntos) Diagonalizar la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$. Esto es, encontrar una matriz *P* invertible y una matriz diagonal, *D*, tal que $P^{-1}AP = D$. Comprobarlo.

<u>Solución</u>:

Calculo de autovalores:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-1)\,(\lambda-5)$$

Cálculo de autovectores asociados:

Para $\lambda = 1$ (doble):

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \{x+2y+z=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=h\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-3x+2y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+2y-3z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

Luego: $P=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$; $P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Comprobación:

$$P^{-1}AP=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 5\\ 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

11. (J07) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & a & 0\\ 2 & b & 2\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determinar los valores que pueden tomar *a* y *b* para la matriz sea diagonalizable.

b) (1 punto) Diagonalizarla cuando $a = 0$ y $b = 1$. (Halla la matriz diagonal D y la matriz de paso P. No es necesario que calcules P^{-1}.)

<u>Solución</u>:

a) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & a-\lambda & 0 \\ 2 & b & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda)(2-\lambda)$

Los valores propios son: $\lambda = 1$, $\lambda = a$ y $\lambda = 2$.
Por tanto, si $a \neq 1$ y 2, los tres autovalores son distintos. En este caso, la matriz A será diagonalizable.

Para $a = 1$, el valor $\lambda = 1$ es doble. En este caso, el autosistema es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + by + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -by \end{cases}$$

El autovalor es de multiplicidad algebraica 2 y el sistema tiene multiplicidad geométrica 1 $\Rightarrow$ la matriz no es diagonalizable en este caso.

Para $a = 2$, el valor $\lambda = 2$ es doble. En este caso, el autosistema es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + by = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ by = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

(1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \text{si } b = 0 \\ z = t \end{cases}$, sistema con multiplicidad geométrica 1. La matriz NO es diagonalizable

(2) $\begin{cases} x = 0 \\ y = h, \text{si } b = 0 \\ z = t \end{cases}$, sistema con multiplicidad geométrica 2. La matriz SI es diagonalizable

Por tanto:
La matriz es diagonalizable si

- $a \neq 1$ y 2, para cualquier valor de b;
- si $a = 2$ y $b = 0$,

b) Cuando $a = 0$ y $b = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, siendo los autovalores $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ y λ $= 2$

Para $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para λ = 2: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

12. (1 punto) (J05) Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Esto es, encontrar una matriz P invertible y una matriz diagonal, D, tal que $P^{-1}AP = D$. Comprobarlo.

<u>Solución</u>:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda - 3)\,(\lambda + 4)$$

Para λ = 1: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Para λ = –4: $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para λ = 3: $\begin{pmatrix} .-2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Luego: $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \dfrac{1}{70}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 21 \\ -6 & 10 & 2 \\ 15 & 10 & -5 \end{pmatrix}$