Puntos, rectas y planos en el espacio. Posiciones relativas

<u>Observación</u>: La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

Puntos, rectas y planos en el espacio

1. La recta $x = \frac{1-y}{3} = \frac{2-z}{2}$ corta a los tres planos coordenados en tres puntos.
Determina las coordenadas de estos puntos, las distancias existentes entre cada par de ellos e indica cuál es el que se encuentra en medio de los otros dos.

Solución:

La recta $x = \frac{1-y}{3} = \frac{2-z}{2} \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{-2} \Rightarrow$ (en paramétricas) $\begin{cases} x = t \\ y = 1-3t \\ z = 2-2t \end{cases}$

Puntos de corte con los planos coordenados.
- Con el plano $x = 0$ ($\Rightarrow t = 0$): A = (0, 1, 2)
- Con el plano $y = 0$ ($\Rightarrow t = 1/3$): B = (1/3, 0, 4/3)
- Con el plano $z = 0$ ($\Rightarrow t = 1$): C = (1, –2, 0)

Distancias:

d(A, B) = $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

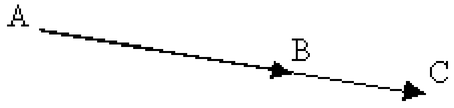
d(A, C) = $\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

d(B, C) = $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$

Las distancias halladas son los módulos de los vectores

AB = $\left(\frac{1}{3}, -1, -\frac{2}{3}\right)$; **AC** = (1, –3, –2); **BC** = $\left(\frac{2}{3}, -2, -\frac{4}{3}\right)$

Como los tres vectores tienen el mismo sentido y el más largo es **AC**, la situación debe ser así:



El punto intermedio es B.

2. Considera los puntos del espacio A(0, 0, 1), B(1, 1,2) y C(0, −1, −1).
a) Encuentra la ecuación del plano ABC.
b) Si D es el punto de coordenadas (k, 0, 0), ¿cuánto ha de valer k para que los cuatro puntos A, B, C y D sean coplanarios?

Solución:
a) Como **AB** = (1, 1, 1) y **AC** = (0, −1, −2), la ecuación general viene dada por:

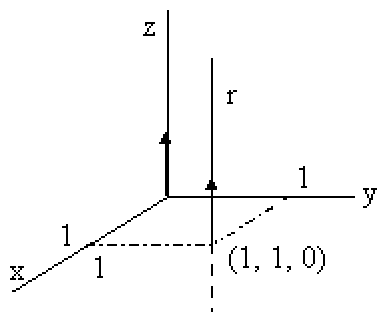
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff -x + 2y - z + 1 = 0 \iff x - 2y + z - 1 = 0$$

b) El punto D(k, 0, 0) será del plano cuando cumpla su ecuación; esto es:
$k - 0 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
Por tanto, D = (1, 0, 0).

---

3. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 1, 0) y es paralela al eje *z* (una ecuación: la que quieras). Haz un esquema dibujando los ejes, el punto y la recta.

Solución:
La ecuación del eje z es $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (corte de los planos $x = 0$ e $y = 0$)
La ecuación de la paralela pedida será $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ (corte de los planos $x = 1$ e $y = 1$)
Gráficamente.



---

4. Halla las coordenadas del punto intersección de la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ y del plano $2x - y + z - 1 = 0$.

Solución:
Las ecuaciones paramétricas de la recta dada son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene:
$2(1 + t) - 1 + (1 - t) - 1 = 0 \Rightarrow t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$

El punto de corte será $\begin{cases} x = 1 - 1 \\ y = 1 \\ z = 1 - (-1) \end{cases} \to$ P(0, 1, 2)

5. a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r_1 que pasa por los puntos A = (1, 2, 3) y B = (2, 2, 3).
b) Calcula la ecuación general del plano π que pasa por los puntos A, B y C = (2, 2, 4).
c) ¿Cuántos planos distintos pueden formarse con los puntos A, B, C y D = (1, 2, 4)? Justifica tu respuesta.
d) Prueba que los puntos A, B, C y D anteriores forman un cuadrado y calcula su área.

Solución:
a) El vector de dirección de la recta es: **AB** = (2, 2, 3) − (1, 2, 3) = (1, 0, 0)

Sus ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$; o bien: $\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

b) El vector **BC** = (2, 2, 4) − (2, 2, 3) = (0, 0, 1)
El plano π está determinado por el punto A y por los vectores **AB** y **BC**; su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 0 & 0 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \pi: y = 2$$

c) El punto D también cumple la ecuación del plano π; por tanto, los cuatro puntos sólo definen un plano.

d) Los puntos A, B, C y D formarán un cuadrado cuando los vectores **AB**, **BC**, **CD** y **DA** sean correlativamente perpendiculares y todos tengan el mismo módulo.
Como **AB** = (1, 0, 0), **BC** = (0, 0, 1), **CD** = (–1, 0, 0) y **DA** = (0, 0, –1) se comprueba que:
AB · **BC** = 0, **BC** · **CD** = 0, **CD** · **DA** = 0 y **DA** · **AB** = 0
También es obvio que todos tienen módulo 1. Por tanto, su área será 1 unidad cuadrada.

---

6. Se considera la recta de ecuación paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$

Halla su ecuación como intersección de dos planos (ecuaciones cartesianas).
¿Existe algún valor de s tal que el punto (1, 2s, s) pertenezca a la recta? Razonar la respuesta tanto en caso afirmativo como en caso negativo.

Solución:
Para encontrar las ecuaciones cartesianas despejamos t en las ecuaciones paramétricas e igualamos:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x-1}{3} \\ t = y + 1 \\ t = \dfrac{z-2}{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = y + 1 \\ \dfrac{z-2}{-4} = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 4y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Para que el punto (1, 2s, s) pertenezca a ambos planos es necesario que

$$\begin{cases} 1 - 6s - 4 = 0 \\ 8s + s + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1/2 \\ s = -2/9 \end{cases}$$

Como se obtienen dos valores diferentes de s el punto (1, 2s, s) no puede pertenecer a ambos planos.

7. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P = (1, 1, 0) y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} 3x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

La recta pedida será la intersección de dos planos: π_1, que pasa por P y contiene a r_1, y π_2, que pasa por P y contiene a r_2

Expresamos ambas rectas en paramétricas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{con } \vec{v}_{r1} = (1, 1, 1) \text{ y } A \in r_1,\ A = (0, 1, 1)$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = h \\ z = -2 - 2h \end{cases} \quad \text{con } \vec{v}_{r2} = (0, 1, -2) \text{ y } B \in r_2,\ B = (1, 0, -2)$$

El plano π_1 viene dado por A, $\vec{v}_{r1}$ y **AP** = (1, 0, −1), su ecuación es:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + z + 1 = 0$$

El plano π_2 viene dado por B, $\vec{v}_{r2}$ y **BP** = (0, 1, 2), su ecuación es:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z+2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$$

Por tanto, la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x = 1; \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2} \right.$$

8. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$.

a) Escribe la recta en forma paramétrica.
b) Para cada punto P de *r*, determina la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ.

Solución:
a) Despejando *y* y *z* en función de *x* se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} y = -1 - x \\ z = 3 + 2x \end{cases}$$

Parametrizando x obtenemos: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

b) Los puntos P de r son de la forma P = (t, –1 – t, 3 + 2t).

Las rectas perpendiculares al eje OZ deben estar en un plano de ecuación z = k (paralelos a la “base” del triedro cartesiano). Por tanto, la perpendicular que pasa por P debe cortar al eje OZ en el punto Q = (0, 0, 3 + 2t); la ordenada z de ambos puntos es la misma, constante.
En consecuencia, el vector de dirección de las rectas pedidas será **QP** = (t, –1 – t, 3 + 2t) – (0, 0, 3 + 2t) = (t, –1 – t, 0).

Las rectas pedidas quedan determinadas por el punto Q y el vector **QP**. Su ecuación, para cada valor de t, será:

$$recta(P, Q) \equiv \begin{cases} x = \quad t\lambda \\ y = \quad (-1 - t)\lambda \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

NOTA. El parámetro de estas rectas es λ, mientras que t determina cada punto P de r. Por ejemplo, para t = 1, el punto P = (1, –2, 5), el punto Q = (0, 0, 5), y la ecuación de la recta perpendicular al eje OZ que pasa por P será $s \equiv \begin{cases} x = \quad \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

9. Encontrar la ecuación paramétrica de la recta dada por $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

¿Existe algún valor de *s* tal que el punto (–3, *s*, *s*) pertenezca a la recta? Razonar la respuesta tanto en caso afirmativo como negativo.

Solución:
Para encontrar las ecuaciones paramétricas de *r* debe resolverse el sistema asociado.

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} 3x + y = -z \\ x - y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \text{(haciendo } z = t\text{)} \; r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4}t \\ y = \dfrac{5}{4}t \\ z = t \end{cases}$$

Si el punto (–3, *s*, *s*) fuese de la recta deberá cumplir sus ecuaciones; esto es:

$$r \equiv \begin{cases} 3\cdot(-3) + s + s = 0 \\ -3 - s + 2s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 9/2 \\ s = 3 \end{cases}$$

Como se obtienen dos valores diferentes para *s*, el punto (–3, *s*, *s*) no puede ser de la recta, cualquiera que sea el valor de *s*.

---

10. Sean los puntos A(2, 3, 0) y B(–2, 1, 4). Determina:
a) Ecuación del plano π mediatriz del segmento AB.
b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados.
c) Ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen.

Solución:
a) El plano pedido pasa por el punto medio de A y B y tiene como vector normal el vector **AB**.

Punto medio: M = $\left(\dfrac{2-2}{2}, \dfrac{3+1}{2}, \dfrac{0+4}{2}\right)$ = (0, 2, 2).

Vector AB: **AB** = (–2, 1, 4) – (2, 3, 0) = (–4, –2, 4).

La ecuación del plano es:

$$-4(x - 0) - 2(y - 2) + 4(z - 2) = 0 \Rightarrow -4x - 2y + 4z - 4 = 0 \Rightarrow 2x + y - 2z = -2$$

b) El plano corta a los ejes coordenados en los puntos:

$P_X = (-1, 0, 0)$; $P_Y = (0, -2, 0)$; $P_Z = (0, 0, 1)$

El volumen del tetraedro vendrá dado por:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) El vector de dirección de la recta es el normal al plano; esto es: $\vec{v}_r$ = (2, 1, –2).

La ecuación de la recta será: $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$

Puntos simétricos

11. Considera el punto P(2, 0, 1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a *r*.
b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución:

a) En paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$, siendo R = (6, 0, 2) un punto de *r* y $\vec{v}_r$ = (–2, 1, 0) su vector de dirección.

El plano pedido viene dado por R, $\vec{v}_r$ y **PR** = (6, 0, 2) – (2, 0, 1) = (4, 0, 1).

Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 6 - 2t + 4h \\ y = t \\ z = 2 + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & -2 & 4 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4z + 2 = 0$$

b) Si P´ es el punto simétrico de P respecto de r, entonces su punto medio M debe ser de la recta r; y, además, los tres puntos deben estar en el plano perpendicular a r que pasa por P.
Dicho plano es π: –2(x – 2) + y = 0 ⇒ 2x – y – 4 = 0.
El punto de intersección de r con π es M:
  2(6 – 2t) – t – 4 = 0 ⇒ t = 8/5 ⇒ M = (14/5, 8/5, 2)

Si P´ = (*a, b, c*), el punto medio entre P y P´ es: M = $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$

Luego: $\frac{a+2}{2} = \frac{14}{5} \Rightarrow a = 18/5$; $\frac{b}{2} = \frac{8}{5} \Rightarrow b = 16/5$; $\frac{c+1}{2} = 2 \Rightarrow c = 3$.

El punto pedido es P´= (18/5, 16/5, 3).

---

12. Calcúlese el simétrico de P(1, 1, 1) respecto del plano $x + y + z = 0$.

Solución:
Sea P´(a, b, c) el punto buscado. Debe cumplir:
1. El vector **PP´** debe ser paralelo al normal del plano $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1)
2. El punto medio (M) del segmento PP´ debe ser del plano.

Por tanto:

PP´ = (a – 1, b – 1, c – 1) = k(1, 1, 1) ⇒ a – 1 = k; b – 1 = k; c – 1 = k [1]

M = $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right) \in \pi \Rightarrow (a + 1)/2 + (b + 1)/2 + (c + 1)/2 = 0 \Rightarrow$

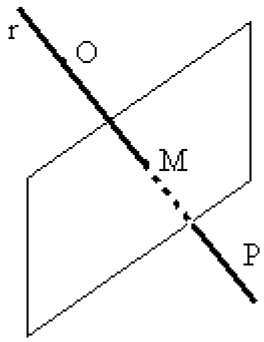
⇒ 3 + a + b + c = 0 [2]

Sustituyendo [1] en [2]:
  3 + 3k + 3 = 0 ⇒ k = –2 ⇒ a = –1,; b = –1; c = –1.

El punto buscado es P´(–1, –1, –1).

13. Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$.
a) Hallar el punto simétrico del (0, 0, 0) respecto de π.
b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ.
c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

Solución:
Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ el punto simétrico de O = (0, 0, 0) respecto de π.



Ambos puntos P y O estarán en la recta *r*, perpendicular a π por O. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y O.

Como el vector normal del plano es $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$, se deduce que $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

Corte de recta y plano: $\lambda + 4\lambda + 9\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3/7$.

Por tanto, $M = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$

Punto medio entre P y O: $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right)$

Como $M = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right) \Rightarrow x_0 = \frac{6}{7},\ y_0 = \frac{12}{7},\ z_0 = \frac{18}{7}$

Luego, el punto simétrico es $P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{189}{7}\right)$

b) El plano π', perpendicular a π, que contiene a OZ viene determinado por el punto O = (0, 0, 0,) y por los vectores $\vec{v}_\pi = (1, 2, 3)$ y $\vec{v}_{OZ} = (0, 0, 1)$.

Su ecuación es: $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 0 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$

c) Los puntos de intersección de π con los ejes coordenados son: A = (6, 0, 0), B = (0, 3, 0) y C = (0, 0, 2). Por tanto, el volumen del tetraedro vendrá dado por:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

14. Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r \equiv (x, y, z) = (1,0,0) + \lambda(0,1,1)$, y el punto P(1, 1, 0), se pide:

a) Hallar la ecuación de una recta *s* que sea perpendicular a *r* y pase por P.
b) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de *r*.
c) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Solución:
Un punto genérico X de la recta *r* es, X = (1. λ, λ).

El vector **PX** = (0, λ – 1, λ). Este vector debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$ = (0, 1, 1), luego

$$(0, \lambda - 1, \lambda) \cdot (0, 1, 1) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = ½ \Rightarrow X = (1, ½, ½)$$

Por tanto, **PX** = (0, –1/2, 1/2) ≡ (0, –1, 1) y $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = \quad t \end{cases}$

b) El punto P' debe cumplir que **OP'** = **OP** + 2**PX** = (1, 1, 0) + (0, –1, 1) = (1, 0, 1).

Luego, P' = (1, 0, 1).

<u>Nota:</u> Convendría hacer una figura para explicarlo.

c) Recta perpendicular a π por P: $u: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \quad \lambda \end{cases}$ ($\vec{v}_u = \vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1)

Punto de corte, Q, del plano π con la recta *u*:

$$1 + \lambda + 1 + \lambda + \lambda = 1 \Rightarrow 3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -1/3 \Rightarrow Q = (2/3, 2/3, -1/3)$$

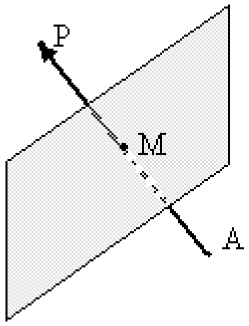
Como Q debe ser el punto medio entre P = (1, 1, 0) y P'' = (x, y, z), se tiene:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1/3; \quad \frac{y+1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 1/3; \quad \frac{z}{2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = -2/3$$

Por tanto, P'' = (1/3, 1/3, –2/3).

15. Para cada valor de *a* los puntos P = (1, 2, 3) y A = (0, 1, *a*) son simétricos respecto a un plano.
Halla, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular encuentra el plano para *a* = 2.

Solución:
El plano buscado es perpendicular al vector **AP** (este será su vector característico) y pasa por el punto medio de ambos, M.



AP = (1, 2, 3) – (0, 1, *a*) = (1, 1, 3 – *a*)

M = $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3+a}{2}\right)$

Su ecuación será:

$$1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\cdot\left(y-\frac{3}{2}\right)+(3-a)\cdot\left(z-\frac{3+a}{2}\right)=0$$

Operando, se tiene:

$$2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(y-\frac{3}{2}\right)+2(3-a)\cdot\left(z-\frac{3+a}{2}\right)=0 \Rightarrow 2x+2y+2(3-a)z-13+a^2=0$$

Para el caso de *a* = 2, queda: $2x+2y+2z-9=0$.

Posiciones relativas entre rectas y planos

<u>Observación</u>: La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

1. Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:
π_1: $x + z = \lambda$
π_2: $4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2$
π_3: $2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda$

Solución:
Para determinar la posición relativa de esos tres planos hay que estudiar el sistema que determinan:

$$\begin{cases} x+z=\lambda \\ 4x+(\lambda-2)y+(\lambda+2)z=\lambda+2 \\ 2(\lambda+1)x-(\lambda+6)z=-\lambda \end{cases}.$$

Cuando este sistema sea compatible determinado los planos se cortan en un único punto; si es compatible indeterminado los planos tienen, al menos, una recta en común; si es incompatible, los tres planos no tienen ningún punto en común.

Vamos a estudiar su compatibilidad. Para ello consideramos las matrices A y M, siendo A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) & -\lambda \end{array}\right)=M$$

El determinante de A, $|A|=(\lambda-2)(-\lambda-6-2\lambda-2)=(\lambda-2)(-3\lambda-8)$

Con esto:

- Si $\lambda \neq 2$ y $-8/3$ el r(A) = 3 = r(M). En este caso el sistema es compatible determinado, y los tres planos se cortarán en un único punto, cuyas coordenadas vendrán dadas por la solución del sistema.

- Si $\lambda = 2$ se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right)=M$

En rango de A es 2, pues $A_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \neq 0$; pero el rango de M es 3, pues

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{vmatrix}=-56$. Por tanto, si $\lambda = 2$ el sistema será incompatible y los planos no tendrán ningún punto en común. Observando los vectores normales de π_1 y π_2 se ve que ambos planos son paralelos.

- Si $\lambda = -8/3$ se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8/3 \\ 4 & -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3 \end{array}\right)=M$

En rango de A sigue siendo 2, pues $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -14/3 \end{vmatrix} \neq 0$. El rango de M es 3, pues el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -8/3 \\ -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & -10/3 & 8/3 \end{vmatrix} = -\frac{112}{27}$. Por tanto, si λ = –8/3 el sistema sigue siendo incompatible y los planos no tendrán ningún punto en común. En este caso, como los vectores normales de π_1 y π_3 son proporcionales, dichos planos son paralelos.

---

2. a) ¿En qué posición relativa pueden estar tres planos en el espacio que no tienen ningún punto en común?
b) Determine la posición relativa de los planos:

π: x – 2y + 3z = 4, σ: 2x + y + z + 1 = 0 y ρ: –2x + 4y –6z = 0

Solución:
a) Pueden ser paralelos, dos de ellos o los tres; también pueden estar como las caras de un prisma triangular.

b) Hay que estudiar la compatibilidad del sistema asociado.

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=4 \\ 2x+y+z=-1 \\ -2x+4y-6z=0 \end{array}\right\}$$

Formamos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) = M$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$ y el menor $M_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -12-12-40 \neq 0$, se tiene que r(A) = 2 y r(M) = 3.

En consecuencia, el sistema no tiene solución; o lo que es lo mismo, los tres planos no tienen ningún punto en común.

3. Dados los planos π_1: x + y + z = –5, π_2: x – 3y – z = 3 y la recta $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$, se pide:

a) Determinar razonadamente la posición relativa de la recta r y la recta s intersección de los planos π_1 y π_2.

b) Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralela a r.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta s vienen dadas por la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=-5-y \\ x-z=3+3y \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene: 2x = –2 + 2y $\Rightarrow$ x = –1 + y

Restándolas se tiene: 2z = –8 – 4y $\Rightarrow$ z = –4 – 2y.

Haciendo y = t obtenemos las ecuaciones: $s:\begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=-4-2t \end{cases}$

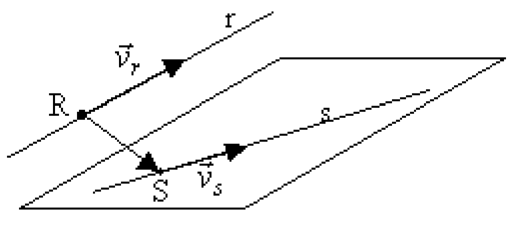
La posición relativa de las rectas r y s se determina estudiando la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r$ = (2, 3, 2), $\vec{v}_s$ = (1, 1, –2) y **RS** = (–1, 0, –4) – (2, 1, 0) = (–3, –1, –4)

donde R es un punto de *r* y S un punto de *s*.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix}=22$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) El plano pedido vendrá determinado por la recta s y por el vector $\vec{v}_r$ = (2, 3, 2). Su ecuación será:



$$\pi:\begin{cases} x=-1+t+2h \\ y=\quad t+3h \\ z=-4-2t+2h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 3 \\ z+4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$ π: 8x – 6y + z + 12 = 0

4. Sea *m* un número real y sean *r* y π la recta y el plano dados respectivamente por

$$r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad , \quad \pi \equiv 3x + 2z = 2 - m\,.$$

a) Estúdiese la posición relativa de *r* y π en función del valor de *m.*
b) Para el valor *m* = 1, hállese la ecuación del plano que pasa por el punto de corte de *r* y π y es perpendicular a la recta $t \equiv x = y = z$.

Solución:
a) Hay que discutir el sistema formado por las dos ecuaciones de la recta y la del plano:

$$\begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ \quad x + 2y + z = 0 \\ 3x \qquad + 2z = 2 - m \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - m$.

Por tanto:
- si m ≠ 2, su valor es distinto de 0 ⇒ el rango de la matiz de coeficientes es 3 ⇒ el sistema es compatible determinado ⇒ el plano y la recta se cortan en un único punto.
- si m = 2, se tiene un sistema homogéneo, $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x \qquad + 2z = 0 \end{cases}$, con infinitas soluciones, pues el rango de la matriz de coeficientes es 2 ⇒ la recta está contenida en el plano.

b) Si m = 1, se tiene el sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x \qquad + 2z = 1 \end{cases}$.

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4 - 1 - 2}{1} = 1\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1 + 1 + 1}{1} = 0\,;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4 + 1 - 6}{1} = -1$$

Por tanto, el punto de corte es P = (1, 0, −1)
El plano pedido, por ser perpendicular a la recta t, tiene como vector normal (1, 1, 1). Luego, por pasar por P, tendrá como ecuación:
1 · (x – 1) + 1 · (y – 0) + 1 · (z + 1) = 0 ⇒ x + y + z = 0.

5. Comprobar que las rectas

r: (x, y, z) = (3, −4, 0) + a(2, −3, −2) s: (x, y, z) = (−7, 1, 2) + b(4, −1, 0)

se cortan en un punto. Encontrar también la ecuación general del plano que determinan.

Solución:

Las rectas se cortarán si los vectores $\vec{v}_r$ = (2, −3, −2), $\vec{v}_s$ = (4, −1, 0) y **RS** son linealmente dependientes, siendo R un punto de r y S un punto de s.

Tomamos R = (3, −4, 0) y S = (−7, 1, 2) $\Rightarrow$ **RS** = (−10, 5, 2).

Como,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 20 = 0$$

los vectores son linealmente dependientes. Luego, las rectas se cortan.

El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 3 + 2a = -7 + 4b \\ -4 - 3a = 1 - b \\ -2a = 2 \end{cases}$$ (sistema que se obtiene igualando las coordenadas de una y otra recta).

Su solución es $a = -1$ y $b = 2$.

Luego, el punto de corte es: P = (1, −1, 2)

Las ecuaciones del plano que determinan son:

$$\begin{cases} x = 1 + 2a + 4b \\ y = -1 - 3a - b \\ z = 2 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 4 \\ y+1 & -3 & -1 \\ z-2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{x + 4y − 5z + 13 = 0.}$$

---

6. Determina para qué valor del parámetro a el plano π: ax + 2y + z = a es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x - ay + z = 1 \\ ax + z = a + 1 \end{cases}$

Solución:

El vector normal al plano $\vec{v}_\pi$ = (a, 2, 1) debe ser perpendicular al de dirección de la recta,

$\vec{v}_r$ = (1, −a, 1)×(a, 0, 1) = (−a, −1 + a, a^2).

Por tanto:

$$\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (a, 2, 1) \cdot (-a, -1 + a, a^2) = 0 \Rightarrow -2 + 2a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

7. Una recta pasa por el punto (1, −1, 0) y es paralela a los planos

x + y = 1, x + z = 1.

Halla sus ecuaciones.

Solución:

Si la recta es paralela a los planos, debe ser perpendicular a los vectores directores de ambos planos: $\vec{v}_{\pi 1}$ = (1, 1, 0) y $\vec{v}_{\pi 2}$ = (1, 0, 1). Por tanto, su dirección vendrá dada por el producto vectorial de esos vectores: $\vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2}$

$$\vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

Como debe pasar por el punto (1, −1, 0), las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = \quad -t \end{cases}$$

8. Sea *r* la recta intersección de los planos

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Determinar el plano π que contiene a la recta *r* y que pasa por el origen de coordenadas.

b) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el punto (1, 0, 1).

Solución:

a) El haz de planos determinado por r es

$$x + 2y - z - 3 + m(2x - y + z - 1) = 0$$

Si se quiere el plano que pasa por el origen: −3 − m = 0 $\Rightarrow$ m = −3.

Luego, el plano π será:

π: $x + 2y - z - 3 - 3(2x - y + z - 1) = 0 \Leftrightarrow$ −5x + 5y − 4z = 0

b) El vector de dirección de la recta *s* perpendicular a π es el normal del plano: $\vec{v}_s = \vec{v}_\pi$.

Su ecuación es:

$$s: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 5t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

9. Sea el tetraedro de la figura formado por A(3, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 6) y D(α, 3, 1). Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C.
b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.
c) El valor de α para que el vector AD sea perpendicular al plano π anterior.
d) Para α = 5, el punto D´ simétrico de D respecto al plano π.

Solución:

a) El área del triángulo de vértices A, B, C viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

Como **AB** = (0, 2, 0) – (3, 0, 0) = (–3, 2, 0), **AC** = (0, 0, 6) – (3, 0, 0) = (–3, 0, 6), se tiene que

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (12, 18, 6)$$

Luego, $S = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2} = \frac{1}{2}\sqrt{504} = 3\sqrt{14}$

b) El plano está determinado por el punto A y los vectores **AB** y **AC** anteriores. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -3 & -3 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 2x + 3y + z - 6 = 0$$

c) El vector **AD** será perpendicular al plano cuando **AD** sea paralelo al vector normal del plano, $\vec{v}_\pi$ = (2, 3, 1); siendo **AD** = (α, 3, 1) – (3, 0, 0) = (α – 3, 3, 1).

Por tanto:

AD = k$\vec{v}_\pi$ ⇒ (α – 3, 3, 1) = k · (2, 3, 1) ⇒ α – 3 = 2, (pues k = 1) ⇒ α = 5.

d) Sea D`(a, b, c) el punto buscado. Debe cumplir:

1. El vector **DD´** debe ser paralelo al normal del plano $\vec{v}_\pi$ = (2, 3, 1)
2. El punto medio (M) del segmento DD´ debe pertenecer al plano.

Por tanto:

DD´ = (a – 5, b – 3, c – 1) = k(2, 3, 1) ⇒ a – 5 = 2k; b – 3 = 3k; c – 1 = k

⇒ a = 5 + 2k; b = 3 + 3k; c = 1 + k [1]

$$M = \left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+3}{2}, \frac{c+1}{2}\right) \in \pi \Rightarrow 2\cdot\frac{a+5}{2} + 3\cdot\frac{b+3}{2} + \frac{c+1}{2} - 6 = 0 \Rightarrow$$

⇒ 2a + 3b + c + 8 = 0 [2]

Sustituyendo [1] en [2]:

14k + 28 = 0 ⇒ k = –2 ⇒ a = 1; b = –3; c = –1.

El punto simétrico buscado es D´(1, –3, –1).

10. a) Comprobar que las rectas:

r ≡ (x, y, z) = (1, 2, –1) + λ(1, 0, –1)   s ≡ (x, y, z) = (0, 3, 1) + μ(–2, 1, 3)

se cortan en un punto.

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a las rectas dadas en el apartado anterior.

Solución:

a) Dos rectas se cortan en un punto cuando no son paralelas y están en el mismo plano.

Como sus vectores de dirección son $\vec{v}_r$ = (1, 0, –1) y $\vec{v}_s$ = (–2, 1, 3) resulta evidente que no son paralelas.

Estarán en el mismo plano si los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y **RS** son coplanarios, siendo R un punto de r y S otro punto de s:

RS = (0, 3, 1) – (1, 2, –1) = (–1, 1, 2).

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1+1=0$, los vectores son linealmente dependientes. Luego, efectivamente, los vectores son coplanarios. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cortan.

b) El plano que determinan viene dado por el punto R y los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1(x-1)+1(y-2)-1(z+1)=0 \Rightarrow x-y+z+2=0$$

---

11. Se consideran los puntos A = (3, 0, 0), B = (0, 2, 0) y C = (0, 0, 1). Se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π que los contienen.

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el origen de coordenadas. Hallar también el punto de intersección de la recta con el plano.

Solución:

a) El plano viene determinado por cualquiera de los puntos, por ejemplo A, y por los vectores **AB** = (0, 2, 0) – (3, 0, 0) = (–3, 2, 0) y **AC** = (0, 0, 1) – (3, 0, 0) = (–3, 0, 1).

Sus ecuaciones serán:

$$\begin{cases} x = 3-3t-3h \\ y = 2t \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -3 & -3 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 2x+3y+6z-6=0$$

b) El vector de dirección de la recta es el normal del plano v_π = (2, 3, 6).

Sus ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases}$

El punto de corte de la recta y el plano se obtiene resolviendo el sistema que determinan. Para ello sustituimos los valores de la recta en la ecuación del plano. Así:

$2\cdot(2\lambda)+3\cdot(3\lambda)+6\cdot(6\lambda)-6=0 \Rightarrow 49\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda = 6/49$

La recta y el plano se cortan si λ = 6/49. Se obtiene el punto P = (12/49, 18/49, 36/49).

12. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \dfrac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

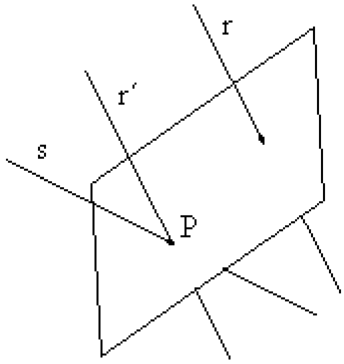
Solución:

Las ecuaciones paramétricas de recta *s* son: $s \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Sustituyendo en π se obtiene el punto P de corte:

$$3t + 2 + t - (-1 + t) + 6 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow P = (-9, -1, -4)$$

Las ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 13 - 13t \end{cases}$



siendo $\vec{v}_r$ = (1, –3, –13)
Por tanto, la recta r´, paralela a r y que pasa por P, es:

$$r' \equiv \begin{cases} x = -9 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -4 - 13t \end{cases}$$

---

13. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(1, 0, –1), es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta dada son: $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

El plano pedido está determinado por el punto A = (1, 0, –1) y por los vectores
$\vec{v}_\pi$ = (1, –1, 2) y $\vec{v}_r$ = (2, 1, 0).

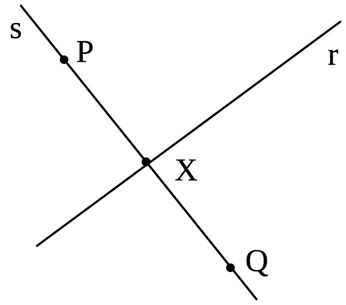
Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & -1 & 1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 4y + 3z + 5 = 0.$$

14. Dada la recta *r* de ecuación $x+1=y-2=\frac{z-3}{4}$ y el punto P(1, 2, 1), calcula:

a) la ecuación de la recta que pasa por P, es perpendicular a *r* y se apoya en *r*.
b) las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de *r*.

Solución:
La situación es la siguiente:



a) Las ecuaciones paramétricas de r son: $r:\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=3+4t \end{cases}$

Sea X = (–1 + t, 2 + t, 3 + 4t) un punto genérico de r.

El vector **PX**, de dirección de la recta s, perpendicular a r, es:

PX = (–1 + t, 2 + t, 3 + 4t) – (1, 2, 1) = (–2 + t, t, 2 + 4t)

Ese vector debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$ = (1, 1, 4). Por tanto:

(–2 + t, t, 2 + 4t) · (1, 1, 4) = 0 $\Rightarrow$ –2 + t + t + 8 + 16t = 0 $\Rightarrow$ t = –1/3

Luego, X = (–4/3, 5/3, 5/3) y **PX** = (–7/3, –1/3, 2/3) = (–7, –1, 2).

La recta pedida es $s:\begin{cases} x=1-7\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

b) Sea Q = (*a, b, c*). Como X = (–4/3, 5/3, 5/3) es el punto medio entre P y Q, se cumple que:

$$\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+2}{2},\frac{c+1}{2}\right)=\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right) \Rightarrow a=-\frac{11}{3},\ b=\frac{4}{3},\ c=\frac{7}{3}$$

Por tanto, $Q=\left(-\frac{11}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$.

15. De los planos paralelos al plano x + y + z = 8, encontrar el que determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área $8\sqrt{3}$.

Solución:
Los planos paralelos son x + y + z = k. Esos planos cortan a los ejes en los puntos:
A = (k, 0, 0), B = (0, k, 0) y C = (0, 0, k).

La superficie del triángulo de vértices ABC es:
S = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, siendo **AB** = (–k, k, 0) y **AC** = (–k, 0, k).

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ -k & k & 0\\ -k & 0 & k\end{vmatrix}=(k^2,k^2,k^2)$$

Luego,
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{k^4+k^4+k^4}=\frac{k^2\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}\ \Rightarrow\ k=-4 \text{ o } k=4.$$

Los planos pedidos son: x + y + z = –4, x + y +z = 4

---

16. Encuentre el plano que contiene a la recta:
$$L\equiv\begin{cases}x=1-t\\ y=2+t\\ z=3\end{cases}$$
y es paralelo a la recta determinada por los puntos: P(1, 1, 1) y Q(–1, 0, 2).

Solución:

El plano pedido está definido por el punto A = (1, 2, 3) de la recta L, por el vector de dirección de L, $\vec{v}_L$ = (–1, 1, 0), y por el vector **PQ** = (–1, 0, 2) – (1, 1, 1) = (–2, –1, 1).

Sus ecuaciones son:

$$\begin{cases}x=1-t-2h\\ y=2+t-h\\ z=3\quad\ +h\end{cases}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & -1 & -2\\ y-2 & 1 & -1\\ z-3 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ x+y+3z-12=0.$$

17. Dados los puntos del espacio A = (2, 0, 0), B = (0, 1, 0) y C = (0, 0, 3).

a) Determina la ecuación del plano π que los contiene.

b) Calcula la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por el origen.

[2 puntos]

Solución:

a) La ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-2) + 6y + 2z = 0 \Rightarrow 3x + 6y + 2z - 6 = 0$$

b) Como el vector (3, 6, 2) es normal al plano, la recta pedida es:

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 6t \\ z = 2t \end{cases}$$

---

18. Halla el valor de k para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

Solución:

Para que las rectas se corten, el sistema formado por las cuatro ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \\ y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

debe ser compatible.

En consecuencia,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 1$$

Para k = 1, el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} x + y \quad = 2 \\ \quad y - z = 3 \\ y - 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \quad = 2 \\ \quad y - z = 3 \\ \quad -2z = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 1;\ y = 4;\ x = -2$$

El punto de corte es P = (–2, 4, 1).

19. Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = -3 \end{cases}$ y el plano π ≡ 2x + y – z + 1 = 0.

Se pide:

a) Determinar el punto P de intersección de *r* y π, y el punto Q en que la recta *r* corta al eje OZ.

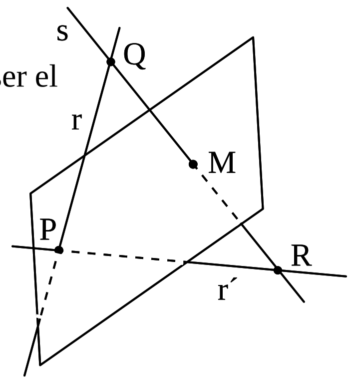
b) Determinar el punto R que es simétrico de Q respecto de π y la ecuación de la recta simétrica de *r* respecto del plano π.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de r son: $r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Sustituyendo en la ecuación del plano: 2t + t – (3 + t) + 1 = 0 $\Rightarrow$ t = 1.
Luego, el punto P = (1, 1, 4).
Los puntos del eje OZ son de la forma (0, 0, z) $\Rightarrow$ t = 0 $\Rightarrow$ Q = (0, 0, 3).

b) Sea R = (x_0, y_0, z_0) el simétrico de Q respecto de π.
Ambos puntos Q y R estarán en la recta *s*, perpendicular a π por Q.
Además, si M es el punto de corte de esa recta y el plano, M debe ser el punto medio entre Q y R.



Como $\vec{v}_\pi$ = (2, 1, –1), se deduce que $s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

Corte de recta y plano: 4λ + λ – 3 + λ + 1 = 0 $\Rightarrow$ λ = 1/3.

Por tanto, M = $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Punto medio de Q y R: $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{3 + z_0}{2}\right)$

Como M = $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{3 + z_0}{2}\right) \Rightarrow x_0 = \frac{4}{3},\ y_0 = \frac{2}{3},\ z_0 = \frac{7}{3}$

Luego, el punto simétrico es R = $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

- La recta r´, simétrica de r respecto e π, es la determinada por los puntos P y R. Como

PR = $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ ≡ (1, –1, –5), su ecuación será: $r´: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$