

## Vectores. Bases. Producto escalar, vectorial y mixto; y aplicaciones

**Observación:** La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

1. Dados los vectores  $\vec{u} = (1, 2)$  y  $\vec{v} = (-3, 1)$ :
- Comprueba que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  forman una base del espacio vectorial de los vectores del plano.
  - Encuentra las componentes del vector  $\vec{w} = (-1, 5)$  en la base  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ .

**Solución:**

- a) Los vectores son linealmente independientes pues:

$$\lambda(1, 2) + \mu(-3, 1) = (0, 0) \Rightarrow \lambda - 3\mu = 0; 2\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ y } \mu = 0$$

La única solución del sistema  $\begin{cases} \lambda - 3\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases}$  es  $\lambda = 0$  y  $\mu = 0$ .

Los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  forman un sistema generador, pues cualquier vector  $(x, y)$  puede ponerse en función de ellos. En efecto:

$$(x, y) = a(1, 2) + b(-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} a - 3b = x \\ 2a + b = y \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\begin{vmatrix} x & -3 \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x + 3y}{7}; b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y - 2x}{7}$$

- b) Para  $\vec{w} = (-1, 5)$ , esto es,  $x = -1, y = 5$ , se tiene:  $a = \frac{-1 + 15}{7} = 2, b = \frac{5 + 2}{7} = 1$ .

Luego  $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$ .

La comprobación es inmediata:  $2\vec{u} + \vec{v} = 2(1, 2) + (-3, 1) = (2, 4) + (-3, 1) = (-1, 5) = \vec{w}$ .

2. Considera los vectores de  $\mathbf{R}^3$ :

$$\vec{v}_1 = (-1, 3, 4), \vec{v}_2 = (2, -1, -3) \text{ y } \vec{v}_3 = (1, 2k + 1, k + 3).$$

- Halla el único valor de  $k$  para el cual estos vectores no son una base de  $\mathbf{R}^3$ .
- Para un valor de  $k$  diferente del que has hallado en el apartado a), ¿cuáles son las componentes del vector  $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$  en la base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ?

**Solución:**

- a) Los vectores no forman base cuando son linealmente dependientes; para ello, el determinante asociado debe ser 0.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5k - 15 = 0 \Rightarrow k = 3$$

- b) Si  $k \neq 3$ , los vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  forman una base, pues son linealmente independientes. En consecuencia, las componentes de  $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$  en función de esa base, son  $(1, 1, 1)$ .

3. a) Se consideran los vectores:  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$  y  $\mathbf{v}_1 = (0, -1, 1)$  y  $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 0)$ . Demostrar que para todo número real  $a$ , el vector  $(-2a, 3a, a)$  es combinación lineal de  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  y también de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ .

b) Elegir tres vectores linealmente independientes entre  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  y escribir el otro como combinación lineal de ellos.

**Solución:**

a) En ambos casos debe cumplirse que el determinante formado por los tres vectores valga 0.

•  $(-2a, 3a, a)$  es combinación lineal de  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  si 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix} = a - (-a) + 2(-3a + 2a) = 2a - 2a = 0$$

•  $(-2a, 3a, a)$  es combinación lineal de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  si 
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2a & 3a & a \end{vmatrix} = a + (3a - 4a) = a - a = 0$$

c) Como 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 = 4,$$
 los vectores  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{v}_1$  son linealmente independientes.

Hay que escribir  $\mathbf{v}_2$  en función de  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{v}_1$ . Esto es, encontrar las constantes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , tales que  $\mathbf{v}_2 = x \mathbf{u}_1 + y \mathbf{u}_2 + z \mathbf{v}_1$ .

O sea:  $(1, -2, 0) = x(1, 1, 2) + y(-1, 1, 0) + z(0, -1, 1) \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = -2 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

Por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2-3}{4} = -\frac{5}{4}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{4}$$

Luego:

$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{4}\vec{u}_1 - \frac{5}{4}\vec{u}_2 + \frac{2}{4}\vec{v}_1$$

4. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

a) Calcula el valor que toma  $k$  en la expresión  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

b) Si  $A(1, 2, -1)$  y  $B(3, 6, 9)$ , halla las coordenadas del punto  $C$  que cumple la relación de partida.

**Solución:**

a) De  $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AC}$ .

Sustituyendo en la igualdad  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ , se tiene:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

b)  $\overrightarrow{AB} = (3, 6, 9) - (1, 2, -1) = (2, 4, 10)$

Si  $O = (0, 0, 0)$ , entonces:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) + (1/2, 1, 5/2) = (3/2, 3, 3/2)$$

Las coordenadas del punto  $C$  son  $(3/2, 3, 3/2)$ .

5. Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre puntos.

**Solución:**

Dados dos vectores  $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$  y  $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$  se define:

- Producto escalar canónico  $\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$
- Producto escalar ordinario  $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$

Obviamente, ambas definiciones son equivalentes.

De la segunda definición se deduce:  $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$

El módulo de un vector se define como:  $|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$

La distancia entre dos puntos  $A$  y  $B$ ,  $d(A, B)$ , es igual al módulo del vector  $\overrightarrow{AB}$ . Si las coordenadas de esos puntos fuesen,  $A = (a_1, b_1, c_1)$  y  $B = (a_2, b_2, c_2)$ , entonces

$$\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$$

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

6. Dados los vectores  $\vec{u} = (1, 2, 0)$  y  $\vec{v} = (0, 1, 2)$ , calcula:

- el producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
- un vector unitario ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$
- el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

**Solución:**

$$\text{a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4, -2, 1)$$

$$\text{b) El vector pedido es } \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{(4, -2, 1)}{\sqrt{16+4+1}} = \left( \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

c) El área del paralelogramo viene dada por el módulo del producto vectorial, luego:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{21}$$

7. Calcula los valores de x e y para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 0, -1).

**Solución:**

Debe cumplirse que:

$$(x, y, 1) \cdot (3, 2, 0) = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 0$$

$$(x, y, 1) \cdot (2, 0, -1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/2 \rightarrow y = -3/4.$$

El vector pedido es: (1/2, -3/4, 1).

8. a) Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores. Comprobar que si  $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = 0$  entonces  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .

b) Calcule los vectores unitarios que sean perpendiculares a los vectores  $\vec{u} = (-3, 4, 1)$  y  $\vec{v} = (-2, 1, 0)$

**Solución:**

a) Si  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$  (La solución  $|\vec{u}| = -|\vec{v}|$  no es posible, pues el módulo de un vector siempre es mayor o igual que cero.)

b) El producto vectorial de dos vectores da un vector perpendicular a ambos. Luego,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -2, 5) \text{ es perpendicular a los vectores dados.}$$

Los vectores unitarios pedidos son:

$$\pm \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \pm \frac{(-1, -2, 5)}{\sqrt{1+4+25}} \rightarrow \left( \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}} \right) \text{ y } \left( \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}} \right)$$

9. Sean los puntos  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 3, 1)$ ,  $C(0, 5, 3)$  y  $D(-1, 4, 3)$ .

- Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. (Halla la ecuación de dicho plano.)
- Demuestra que el polígono de vértices consecutivos  $ABCD$  es rectángulo.
- Calcula el área de dicho rectángulo.

**Solución:**

a) Los cuatro puntos pertenecerán al mismo plano si los vectores  $\mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{AC}$  y  $\mathbf{AD}$  son linealmente dependientes.

Estos vectores son:

$$\mathbf{AB} = (2, 3, 1) - (1, 2, 1) = (1, 1, 0)$$

$$\mathbf{AC} = (0, 5, 3) - (1, 2, 1) = (-1, 3, 2)$$

$$\mathbf{AD} = (-1, 4, 3) - (1, 2, 1) = (-2, 2, 2)$$

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , los vectores, efectivamente, son linealmente dependientes.

El plano que determinan viene dado, por ejemplo, por el punto  $A$  y por los vectores  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{AC}$ . Su ecuación es:

$$\begin{cases} x = 1 + t - h \\ y = 2 + t + 3h \\ z = 1 + 2h \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & 1 & 3 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 1 = 0$$

Observación: Puede verse que los cuatro puntos dados cumplen la ecuación del plano.

b) El cuadrilátero será rectángulo si los vectores  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{BC}$ , y  $\mathbf{AB}$  y  $\mathbf{AD}$  son ortogonales.

Como:  $\mathbf{AB} = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{BC} = (-2, 2, 2)$  y  $\mathbf{AD} = (-2, 2, 2)$

se tiene:  $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{AD} = (1, 1, 0) \cdot (-2, 2, 2) = 0$

Por tanto, se trata de un rectángulo.

c) Al tratarse de un rectángulo, su superficie se halla multiplicando su base por su altura.

La base puede ser el módulo de  $\mathbf{AB}$ ; la altura, el módulo de  $\mathbf{AD}$ .

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

Por tanto,

$$S = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{24}$$

NOTA: La superficie también podría hallarse mediante el producto vectorial:

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

10. Si A, B y C son los puntos de coordenadas (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), respectivamente
- Calcula el área del triángulo que forman los puntos A, B y C.
  - Determina el ángulo que forman los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ .

**Solución:**

a) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por  $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

Como  $\vec{AB} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$  y  $\vec{AC} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$  se tiene:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Luego:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

b) Por el producto escalar:

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{el ángulo que forman es de } 60^\circ.$$

11. Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son vectores ortogonales y de módulo 1, hallar los posibles valores del parámetro real  $a$  para que los vectores  $\vec{u} + a\vec{v}$  y  $\vec{u} - a\vec{v}$  formen un ángulo de  $60^\circ$ .

**Solución:**

Los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  forman base ortogonal. Entonces, podemos expresar:

$$\vec{u} + a\vec{v} = (1, a), \quad \vec{u} - a\vec{v} = (1, -a)$$

Como

$$\begin{aligned} \cos(\vec{u} + a\vec{v}, \vec{u} - a\vec{v}) &= \frac{(1, a) \cdot (1, -a)}{\sqrt{1+a^2} \sqrt{1+(-a)^2}} = \frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 - 2a^2 &= 1 + a^2 \Rightarrow 3a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

12. Halla la superficie del triángulo de vértices P = (1, 1, 4), Q = (0, 0, 3) y R =  $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$ .

**Solución:**

El triángulo está determinado por los vectores

$$\vec{PQ} = (-1, -1, -1) \text{ y } \vec{RQ} = (-4/3, -2/3, 2/3)$$

Su superficie será:  $S = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{RQ}| = \frac{1}{2} \left| \left( -\frac{4}{3}, 2, -\frac{2}{3} \right) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{56}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$$\text{El producto vectorial es: } \vec{PQ} \times \vec{RQ} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -4/3 & -2/3 & 2/3 \end{vmatrix} = (-4/3, 2, -2/3)$$

13. Comprueba que los puntos  $A = (1, 0, 3)$ ,  $B = (-2, 5, 4)$ ,  $C = (0, 2, 5)$  y  $D = (-1, 4, 7)$  son coplanarios. De todos los triángulos que se pueden construir teniendo como vértices tres de esos cuatro puntos, ¿cuál es el de mayor área? Halla el valor de dicha área.

**Solución:**

Serán coplanarios si los vectores  $\mathbf{AB}$ ,  $\mathbf{AC}$  y  $\mathbf{AD}$  son linealmente dependientes.

Veamos:

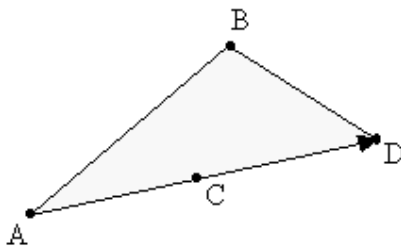
$$\mathbf{AB} = (-2, 5, 4) - (1, 0, 3) = (-3, 5, 1)$$

$$\mathbf{AC} = (0, 2, 5) - (1, 0, 3) = (-1, 2, 2)$$

$$\mathbf{AD} = (-1, 4, 7) - (1, 0, 3) = (-2, 4, 4)$$

Como los vectores  $\mathbf{AC}$  y  $\mathbf{AD}$  son proporcionales,  $\mathbf{AD} = 2 \cdot \mathbf{AC}$ , los tres vectores son linealmente dependientes. (También puede verse que el determinante asociado a esos vectores vale 0.)

Si  $\mathbf{AD} = 2 \cdot \mathbf{AC}$ , los puntos A, C y D están alineados como se indica en la figura.



El triángulo de mayor superficie que puede construirse es el de vértices A, B y D.

Su superficie es:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} |(16, 10, -2)|$$

Luego,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + 10^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{360} = 3\sqrt{10}$$

El producto vectorial  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (16, 10, -2)$

14. Comprueba si los puntos  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, -2, 4)$  y  $(1, -3, 5)$  están alineados. En caso negativo, determina la ecuación del único plano que los contiene.

**Solución:**

Sean  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (1, -2, 4)$  y  $C = (1, -3, 5)$ .

Como los vectores  $\mathbf{AB} = (0, -4, 1)$  y  $\mathbf{AC} = (0, -5, 2)$  son linealmente independientes (se ve de manera inmediata, pues sus coordenadas no son proporcionales), los puntos no están alineados.

La ecuación del plano que determinan es:  $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y-2 & -4 & -5 \\ z-3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-1=0$