PROBLEMAS DE SITEMAS (propuestos en exámenes)

Preguntas de tipo test

1. El sistema $\begin{cases} 3x+y+4z=0 \\ x+y=0 \\ 2x+m^2z=m-2 \end{cases}$ es incompatible:

a) Si $m = 1$ b) Si $m = -2$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m^2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 8 \neq 0 \text{ si } m \neq \pm 2 \to \text{ r}(A) = 3, \text{ SCD.}$$

Si $m = -2$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) = M$, siendo r(A) = 2 y r(M) = 3 → Sistema incompatible.

La respuesta es b)

2. (M13) El sistema $\begin{cases} \lambda x+y=5 \\ 5x+\lambda z=0 \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$ compatible indeterminado:

a) Siempre, para todo $\lambda \in \mathbf{R}$. b) Nunca, para ningún $\lambda \in \mathbf{R}$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Las matrices A y M, de coeficientes y ampliada, respectivamente, son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) = M \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 5 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 4\lambda = (\lambda+4)(-\lambda)$$

Este determinante vale 0 si $\lambda = 0$ o $\lambda = -4$.

- Si $\lambda \neq 0$ y $-4 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $\lambda = 0$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = M$. El rango de A es 2.

Para ver el rango de M calculamos: $|M_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 20. Por tanto, el rango de M es 3.

- Si $\lambda = -4$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$. El rango de A es 2.

Para ver el rango de M calculamos: $|M_2| = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 20. Por tanto, el rango de M es 3.

Luego, si λ = 0 o λ = -4, el sistema es incompatible.
Así pues, nunca es compatible indeterminado.
La respuesta es b)

3. (M12) El sistema $\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$:

a) Es compatible para todo λ e **R**. b) Es compatible si λ ≠ 1 y λ ≠ 8/3.
c) Es incompatible si λ = 1.
Solución:
Las matrices A y M, de coeficientes y ampliada, respectivamente, son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{array}\right) = M$$

- $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 6\lambda - 5\lambda + 9 - 1 = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = (\lambda - 1)(3\lambda - 8)$

Este determinante vale 0 si λ = 1 o λ = 8/3.
Con esto:

- Si λ ≠ 1 y 8/3 ⇒ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si λ = 1, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$

El rango de A es 2.

Para ver el rango de M calculamos: $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, el rango de M también vale 2.

Luego, si λ = 1 el sistema es compatible indeterminado.
La respuesta es b)

4. (J11) El sistema $\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones:

a) Si $m=\pm 1$ b) Si $m\neq -1$ c) Ninguna de las anteriores.

<u>Solución</u>:

$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = 7m^2-7 \neq 0$ si $m \neq \pm 1 \to$ r(A) = 3, SCD.

Si $m=-1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M$, siendo r(A) = 2 y r(M) = 3 → Sistema incompatible.

La respuesta es c): Si m = 1 el sistema es homogéneo con r(A) = 2 → Sistema CI: infinitas soluciones.

5. (J03) El sistema $\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$ tiene solución única:

a) Si $m\neq \pm 1$. b) Si $m=-1$. c) Si $m=1$.

<u>Solución</u>:

$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = 7m^2-7 \neq 0$ si $m \neq \pm 1 \to$ r(A) = 3, SCD.

La respuesta es a)

6. (J10) El sistema $\begin{cases} px+y+z=1 \\ x+py+z=p \\ x+y+z=2 \end{cases}$ es indeterminado

a) Nunca b) Si $p=1$ c) Si $p\neq 1$

<u>Solución</u>:

El determinante $\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (p-1)^2$ es cero si p = 1 y para ese valor:

rag(A) = 1 y rag(M) = 2 luego el sistema es incompatible.
Si $p\neq 1$ rag(A) = rag(M) = 3 y el sistema es determinado. En consecuencia este sistema nunca es indeterminado.
La respuesta es a)

7. (S07) El sistema $\begin{cases} x+ky-z=0 \\ kx-y+z=0 \\ (k+1)x+y=0 \end{cases}$, tiene infinitas soluciones:

a) Si $k \neq \pm 1$. b) Si $k=1$. c) Si $k=-1$.

Solución:
Un sistema homogéneo tiene solución distinta de la trivial cuando el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas. En este caso, el rango debe ser menor que 3; y por tanto, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo.
Esto es:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2-k-2=0 \Rightarrow k=-1 \text{ o } k=2.$$

La respuesta es c)

Problemas

1. (J13) a) (1 punto) Estudia, dependiendo de los valores del parámetro real *a*, la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + z = a+1 \\ (a+1)x - 2z = 0 \\ y + (2a-7)z = 2a+2 \end{cases}$$

b) (0,5 puntos) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y A^* la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de A^*: r(A) = r(A^*).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & -1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2a-7 & 2a+2 \end{array}\right) = A^*$$

El determinante de A vale $2(a+1)+(a+1)+(a+1)(2a-7) = (a+1)(2a-4)$

Este determinante vale 0 si $a = -1$ o $a = 2$. Con esto:

- Si $a \neq -1$ y $2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(A^*). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = 2$, se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{array}\right) = A^*$

Es evidente que r(A) = 2. Por otra parte, el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -2(-6-3) \neq 0$, luego r($A^*$) = 3. Por tanto, si $a = 2$ el sistema es incompatible.

- Si $a = -1$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) = A^*$

Es evidente que r(A) = r(A^*) = 2. Luego el sistema es compatible indeterminado.

Su solución general es $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

2. (M13) (1,5 punto) En el sistema $\begin{cases} (1-p)x = 1-p^2 \\ y = 3 \\ x+y+pz = 3 \end{cases}$ estudia su naturaleza, según los valores de *p*, y resuélvelo cuando sea posible.

<u>Solución</u>:

Las matrices *A* y *M*, de coeficientes y ampliada, son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-p & 0 & 0 & 1-p^2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & p & 3 \end{array}\right) = M$.

El determinante de *A* es $p(1 - p)$.

- Si $p \neq 0$ y 1 $\Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema es compatible determinado.

Su solución es: $\begin{cases} x = 1+p \\ y = 3 \\ z = \dfrac{-1-p}{p} \end{cases}$.

- Si $p = 1 \Rightarrow$ Las matrices *A* y *M* son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = M$, ambas con rango 2,

luego el sistema es compatible indeterminado, siendo la solución general $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$.

- Si $p = 0 \Rightarrow$ Las matrices *A* y *M* son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) = M$, siendo r(*A*) = 2. Puesto que

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a –1, r(M) = 3, y el sistema es incompatible.

3. (P10) (2 puntos) Discute, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay + z = a-1 \\ -ax + (a+1)y = a \\ ax - y + (2a-1)z = 2a+1 \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & a-1 \\ -a & a+1 & 0 & a \\ a & -1 & 2a-1 & 2a+1 \end{array}\right) = M$$

El determinante de A,

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & a+1 & 0 \\ a & -1 & 2a-1 \end{vmatrix} = a + a^2(2a-1) - a(a+1) = 2a^3 - 2a^2 = 2a^2(a-1)$$

Observación: Si a F3 se le suma F2, queda más fácil.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & a+1 & 0 \\ a & -1 & 2a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & a+1 & 0 \\ 0 & a & 2a-1 \end{vmatrix} = a\left(a(2a-1) - a\right) = 2a^2(a-1)$$

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y 1 $\Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = 0$, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$

Como la 1ª columna (C1) es nula y la C3 = –C4, el rango de ambas matrices es 2: r(A) = r(M) = 2. En consecuencia, el sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = 1$, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Pero el rango de M es 3, pues el menor

$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$. En consecuencia, el sistema será incompatible.

4. (P11) a) (1,5 puntos) Estudia, dependiendo de los valores del parámetro real a, la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a+1)x+y+z=-1 \\ (-a-1)x-2z=2 \\ y+(a^2-a-1)z=-a+2 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema cuando $a = 2$ (0,5 puntos) y cuando $a = 1$ (0,5 puntos).

<u>Solución</u>:

Sea A la matriz de coeficientes *y* A^* la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de A^*: r(A) = r(A^*).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & -1 \\ -a-1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{array}\right)=A^*$$

El determinante de A vale

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix}=2(a+1)+(a+1)(a^2-a-1-1)=(a+1)(a^2-a)$$

Este determinante vale 0 si $a = 0$, $a = -1$ o $a = 1$. Con esto:

- Si $a \neq 0, -1$ y $1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(A^*). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = 0$, se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)=A^*$

Es evidente que r(A) = 2. Por otra parte, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2$, luego r($A^*$) = 3. Por tanto, si $a = 0$ el sistema es incompatible.

- Si $a = -1$, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)=A^*$

Es evidente que r(A) = 2. Por otra parte, como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-8$, se deduce que r($A^*$) = 3. Luego, también en este caso el sistema es incompatible.

- Si $a = 1$: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)=A^*$.

Como puede observarse, la cuarta columna, la ampliada, es igual a la tercera multiplicada por −1. En consecuencia, la matriz ampliada no cambia el rango. Por tanto, el rango de A^* es igual al de A e igual a 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Luego, si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Solución para $a = 2$.

$$\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ -3x - 2z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E2+E1 \begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ y - z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E3+E2 \begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ y - z = 1 \\ 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Para $a = 1$, el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ -2x - 2z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow E2+E1 \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ y - z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 - z - y \\ y = 1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Haciendo $z = t$, se tiene: $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$.

<u>Opción para $a = 3$</u>
Para $a = 3$ el sistema es:

$$\begin{cases} 4x + y + z = -1 \\ -4x - 2z = 2 \\ y + 5z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow E2+E1 \begin{cases} 4x + y + z = -1 \\ y - z = 1 \\ y + 5z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow E3+E2 \begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ y - z = 1 \\ 6z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

<u>Observación</u>: El determinante de A se podría haber simplificado como sigue:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2 - a - 1 \end{vmatrix} = F2+F1 \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - a - 1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2 - a - 1 + 1) =$$

$$= (a+1)(a^2 - a)$$

Las soluciones de $(a+1)(a^2 - a) = 0$ ($\Leftrightarrow$ $(a+1) \cdot a \cdot (a-1) = 0$) son $a = -1$, $a = 0$ y $a = 1$.

5. (S09) (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x+y-az=0 \\ -x+ay+az=2a+1 \\ x+y+(a^3-2a)z=a-1 \end{cases}$$

Solución:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de M: r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a^3-2a & a-1 \end{array}\right)=M \Leftrightarrow \text{(Transformaciones de Gauss)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} A= \\ F2+F1 \\ F3-F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 2a+1 \\ 0 & 0 & a^3-a & a-1 \end{array}\right)=M \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-az=0 \\ (a+1)y \quad =2a+1 \\ (a^3-a)z=a-1 \end{cases}$$

Determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3-a \end{vmatrix}=(a+1)(a^3-a)=a(a+1)^2(a-1)$$

Este determinante vale 0 si $a = 0$, $a = -1$ o $a = 1$.
Con esto:

- Si $a \neq 0, -1$ y $1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 0$, se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)=M$

Es obvio que el rango de A vale 2, mientras que el de M es 3. Por tanto, en este caso, el sistema es incompatible.

- Si $a = -1$, se tiene $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)=M$

En este caso, también de manera inmediata, se ve que r(A) = 1 y r(M) = 2. El sistema vuelve a ser incompatible.

- Si $a = 1$: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=M$

Como ambos rangos son iguales, r(A) = 2 = r(M), el sistema será compatible indeterminado.

Soluciones:

- Para $a = 1$, el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ \quad 2y \quad =3 \\ \quad\quad 0z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=t \end{cases}$$, cuya solución es $$\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}+t \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=t \end{cases}$$

6. (S08) a) (1,5 puntos)

Discute el sistema $\begin{cases} 3x+ay+z=a-2 \\ x+y+2z=0 \\ ax+y-z=a-2 \end{cases}$ según el valor del parámetro a.

b) (0,5 puntos) Halla, si existe, la solución cuando $a=-1$.

Solución:

a) Estudiando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 1 & a-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & -1 & a-2 \end{array}\right)=M \Rightarrow |A|=2a^2-8=0 \text{ si } a=\pm 2.$$

Por tanto:

- Si $a \neq 2$ y -2, r(M) = 3 = r(A) $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $a=-2$, r(M) = 2 y r(M) = 3 $\Rightarrow$ El sistema es incompatible.
- Si $a=2$, r(M) = 2 y r(A) = 2 $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a=-1$ el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} 1)3x-y+z=-3 \\ 2)x+y+2z=0 \\ 3)-x+y-z=-3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 1)+3)2x=-6 \\ 2)-3)2x+3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \\ z=3 \end{cases}$$

7. (S06) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a (1 punto) y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado (0,5 puntos).

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+4y+az=7 \\ x+3y+(a^2+a-1)z=2a+3 \end{cases}$$

Solución:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de M: r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & a & 7 \\ 1 & 3 & a^2+a-1 & 2a+3 \end{array}\right)=M$$

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix}=a-a^2=a(1-a)$

Este determinante vale 0 si $a=-1$ o $a=1$

Con esto:

- Si $a\neq -1, 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a=-1$ se tendrá:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)=M$$

El rango de A es 2. Sin embargo, el rango de M vale 3, pues $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$. Por tanto, el sistema será incompatible.

- Si $a=1$ se tendrá:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)=M$$

Como la columna de términos independientes es la suma de las otras tres, el r(M) = r(A) = 2. Por tanto, el sistema será compatible indeterminado.

- Para a = 1, el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2z \\ x=1-3z \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} x=1-3t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$$

8. (2 puntos) (S05)
a) (1 punto) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a.

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+ay+3z=1 \\ x+y+(2-a)z=a \end{cases}$$

b) (1 punto) Resolverlo cuando $a = 0$ y cuando $a = -1$.
<u>Solución</u>:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de M: r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & a \end{array}\right)=M \Rightarrow \text{El determinante de A, } |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix}=a-a^2=a(1-a)$$

Este determinante vale 0 si $a = 0$ o $a = 1$

Con esto:

- Si $a \neq 0, 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 0$ se tendrá:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)=M$$

Como F3 = F1 $\Rightarrow$ r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = 1$ se tendrá:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M$$

El rango de A es 2, las columnas 1ª y 2ª son iguales. Sin embargo, el rango de M vale 3, pues $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$. En este caso, el sistema será incompatible.

- Para $a = 0$, el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2z \\ x=1-3z \end{cases}. \quad \text{Su solución es} \begin{cases} x=1-3t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$$

- Para $a = -1$, el sistema es $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-y+3z=1 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$ empleando la regla de Cramer, se obtienen las

soluciones:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-6}{-2}=3\,;\; y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2}{-2}=-1\,;\; z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2}{-2}=-1$$

9. (J09) Se considera el sistema $\begin{cases} x-y+z=-1\\ y+z=2a\\ x+2z=a^2\end{cases}$, donde a es un parámetro real.

a) Discute el sistema en función del valor de a. (1,5 puntos)
b) Resuelve el sistema para $a = 0$. (0,25 puntos)
c) Resuelve el sistema para $a = 1$. (0,75 puntos)

Solución:

a) Sean las matrices A, de coeficientes, y M, ampliada con los términos independientes.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2a\\ 1 & 0 & 2 & a^2\end{array}\right)=M$$

El rango de A es 2 pues $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, mientras que $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2-1-1=0$

Para determinar el rango de M consideramos el menor

$$|M_1|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2a\\ 1 & 0 & a^2\end{vmatrix}=a^2-2a+1=(a-1)^2$$

Observándose que si $a = 1$ el rango de M valdrá 2, pero si $a \neq 1$ el rango será 3.

Por tanto:

- Si $a\neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 2 y r(M) = 3. El sistema será incompatible.
- Si $a = 1 \Rightarrow$ r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

b) Si $a = 0$ el sistema no tiene solución.

c) Para $a = 1$ el sistema es: $\begin{cases} x-y+z=-1\\ y+z=2\\ x+2z=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z=2\\ x+2z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2z\\ y=2-z\\ z=z\end{cases} \Rightarrow \text{(haciendo } z=t\text{)} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2t\\ y=2-t\\ z=t\end{cases}$$

10. (J08) (1,5 puntos) a) Discutir, según los valores de m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + my + mz = m \\ my + mz = 4m \end{cases}$$

b) Resolverlo, si es posible, para el caso $m = 1$.

Solución:

a) Estudiando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m & 1 \\ 1 & m & m & m \\ 0 & m & m & 4m \end{array}\right) = M$$

En la matriz A, como la primera y segunda fila son iguales, el rango(A) ≤ 2. El único menor que puede no ser nulo es $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m \end{vmatrix} = m$, que es distinto de 0 cuando $m \neq 0$. Luego, el rango(A) = 2 si $m \neq 0$, e igual a 1 si $m = 0$.

Para la matriz M estudiamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \\ 0 & m & 4m \end{vmatrix} = m - m^2 = m(1-m)$.

En consecuencia, rango(M) = 3 si $m \neq 0$ y 1 ; y es igual a 2 si $m = 0$ o $m = 1$.

Por tanto:

- Si $m \neq 0$ y 1, r(M) = 3 > r(A) ⇒ El sistema es incompatible.
- Si $m = 0$, r(M) = 2 y r(A) = 1 ⇒ El sistema es incompatible.
- Si $m = 1$, r(M) = 2 y r(A) = 2 ⇒ El sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 1$ el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ y = 4 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}$$

11. J07) (1,5 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y+z=2 \\ 5x+\lambda y+3z=5 \end{cases}$$

a) Discute su compatibilidad según los valores de λ.
b) Resuélvelo para λ = −3.
Solución:
a) Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(*A*) = r(*M*).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & \lambda & 3 & 5 \end{array}\right)=M$$

El determinante de *A*, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & \lambda & 3 \end{vmatrix}=\lambda+3$

El determinante es nulo cuando λ = −3.
Con esto:

- Si λ ≠ −3 ⇒ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.

- Si λ = −3 se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right)=M$. Como puede verse, C1 = C4; por tanto,

r(A) = 2 = r(M) y el sistema será compatible indeterminado.

b) Si λ = −3 se tiene: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ 2x-2y=2-z \end{cases}$.

Su solución es: $\begin{cases} x=1-3t \\ y=-t \\ z=4t \end{cases}$

12. (J02) a) (1 punto) Discutir, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$$

b) (0,5 puntos) Si para algún valor de m es compatible indeterminado, dad sus soluciones.

<u>Solución</u>:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & m^2 & m-1 \end{array}\right)=M$$

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix}=7m^2-7=7(m-1)(m+1)$

Discusión:

- Si $m\neq\pm1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $m=1$, r(A) = 2 = r(M), pues, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)=M$.

El sistema es homogéneo con infinitas soluciones.

- Si $m=-1$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)=M$. Los rangos son diferentes, pues el menor

$M_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-4\neq0$. Por tanto: r($A$) = 2 y r(M) = 3 $\rightarrow$ sistema incompatible.

b) Resolución para $m=1$.

El sistema queda: $\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2z=-4y \\ 2x+z=-3y \end{cases} \rightarrow$ solución: $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-7t \end{cases}$

- Si $m\neq\pm1$, (no se pide) la solución es: $x=\dfrac{-2}{7(m+1)}$; $y=\dfrac{-1}{7(m+1)}$; $z=\dfrac{1}{m+1}$

13. (J06)
Estudiar el sistema según los valores de m (1 punto) y resolverlo para $m = -1$ (0,5 puntos)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

<u>Solución</u>:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al rango de M. Si r(A) = r(M) = 3, será compatible determinado; si r(A) = r(M) < 3, compatible indeterminado.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m = m(m-1)$

Con esto:

- Si $m \neq 0$ y 1 $\Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si m = 1, las matrices son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = M$, con r(A) = 2 y r(M) = 3, pues el

  menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Por tanto el sistema será incompatible.
- Si m = 0, las matrices son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = M$, con r(A) = 2 y r(M) = 2, pues la

  columna de los términos independientes está repetida.. En este caso, el sistema será compatible indeterminado.

Si $m = -1$, el sistema queda $\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Su solución puede hallarse por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{2}$$