Matemáticas II TEMA 10
La integral indefinida

1. Concepto de integral indefinida

La derivada de una función permite conocer la tasa de variación (el cambio instantáneo) de un determinado fenómeno a partir de su función. Con la integración, el proceso es inverso: se trata de conocer la función inicial a partir de su derivada: partiendo del estudio de la variación de un fenómeno, llegar a conocer la función que lo explica.

1.1. Primitiva de una función

Si se conoce una función $F(x)$, es fácil hallar su derivada $F'(x)$ $\to$ Se aplican las fórmulas. El proceso inverso, encontrar $F(x)$ a partir de $F'(x)$, se llama integración.

$F(x) \to$ (derivación) $\to$ $F'(x) = f(x)$ $\to$ (integración) $\to$ $F(x)$

A la función $F(x)$ se le llama primitiva o antiderivada de la función $f(x)$. Para ver que la primitiva de una función es correcta basta con derivar, pues:

$F(x)$ es una primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Ejemplos:

a) Si $F(x) = x^2 + 3x$, su derivada es $F'(x) = 2x + 3$; entonces: una primitiva de $f(x) = 2x + 3$ será $F(x) = x^2 + 3x$.

Observación:

Otra primitiva de $f(x) = 2x + 3$ es, por ejemplo, $F(x) = x^2 + 3x + 14$, pues derivando: $F'(x) = \left(x^2 + 3x + 14\right)' = 2x + 3 = f(x)$. Todas la funciones de la forma $F(x) = x^2 + 3x + c$, donde c es un número, son primitivas de $f(x) = 2x + 3$

b) Si $F(x) = \ln(3x+1)$, su derivada es $F'(x) = \dfrac{3}{3x+1}$; en consecuencia, una primitiva de $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$ será $F(x) = \ln(3x+1)$.

$\to$ Todas las funciones de la forma $F(x) = \ln(3x+1) + c$ son primitivas de $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$.

c) Para hallar una primitiva de $f(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}}$ hay que saber la fórmula de la "derivada de la raíz"; esto es, que si $y = \sqrt{x^3+17} \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}}$. En consecuencia, una primitiva de $f(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+17}}$ será $y = F(x) = \sqrt{x^3+17}$.

Observación:

A lo largo de este tema se estudiarán los métodos básicos de integración, pero si no se conocen con soltura (y de memoria) las fórmulas de derivación el trabajo resultará inútil.

1.2. Integral indefinida

Dada una función $f(x)$, si $F(x)$ es una de sus primitivas, la integral indefinida de $f(x)$ es la función $F(x)+c$, donde c es un número que se llama constante de integración. Se escribe así:

$$\int f(x)dx = F(x)+c\,,\ \text{(}dx\text{ indica la variable de integración; de derivación)}$$

En consecuencia, la derivada y la integral son "operaciones" inversas; de manera análoga a como lo son la raíz cuadrada y el cuadrado o la exponencial y el logaritmo. Esto es, al aplicar sucesivamente la integral y la derivada a una función se obtiene la misma función:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx = f(x)$$

En la segunda igualdad debería sumarse una constante. No lo hago para que quede más clara la idea fundamental.

Ejemplos:

a) $\int (2x+3)dx = x^2+3x+c$. Puede comprobarse que $\frac{d}{dx}\left(x^2+3x+c\right) = 2x+3$

b) $\int \frac{3}{3x+1}dx = \ln(3x+1)+c$. Puede comprobarse que $\frac{d}{dx}\left(\ln(3x+1)+c\right) = \frac{3}{3x+1}$

c) $\int 4x^3dx = x^4+c$, pues $\frac{d}{dx}\left(x^4+c\right) = 4x^3$

1.3. Propiedades de la integral indefinida

1) La <u>integral de un número por una función</u> es igual al número por la integral de la función:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Esto significa que los números que multiplican a una función pueden *entrar* y *salir* del integrando, según convenga. Así, por ejemplo: $\int f(x)dx = \frac{1}{k}\int kf(x)dx = k\int \frac{f(x)}{k}dx$.

Esta propiedad facilita el cálculo de integrales mediante el sencillo procedimiento de ajustar constantes.

Ejemplos:

a) Para hallar $\int 8x^3dx$ puede verse el ejemplo c) anterior y escribir:

$$\int 8x^3dx = \int 2\cdot 4x^3dx = 2\left(\int 4x^3dx\right) = 2\left(x^4+c\right) = 2x^4+c' \rightarrow \text{(puede sustituirse } c' \text{ por } c\text{).}$$

b) Obsérvese con un caso particular lo que se ha dicho más arriba sobre que la integral y la derivada son "operaciones" inversas:

$\rightarrow$ Primero se deriva, después se integra:

$$\int\left(\frac{d}{dx}\left(4x^3\right)\right) = \int\left(12x^2\right)dx = \int\left(4\cdot 3x^2\right)dx = 4\int 3x^2dx = 4x^3+c \text{ (Se escribe la constante } c\text{).}$$

→ Primero se integra, después se deriva: $\frac{d}{dx}\left(\int\left(4x^3\right)dx\right)=\frac{d}{dx}\left(x^4+c\right)=4x^3$ → No hay c.

2) La <u>integral de una suma de funciones</u> es igual a la suma de las integrales de cada una de esas funciones:

$$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

Las propiedades 1) y 2) indican que la integral se comporta como un *operador lineal*.

Ejemplos:

a) Número por función:

$$\int 5\left(2x+3\right)dx=5\int\left(2x+3\right)dx=5\left(x^2+3x+c\right)=5x^2+15x+c'$$ (da igual poner c que c').

OJO: Esta propiedad sólo se refiere a factores numéricos. Así: $\int x(2x+3)dx\neq x\int(2x+3)dx$

b) Para hallar $\int 3x^3dx$ se escribe:

$$\int 3x^3dx=\int 3\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 4\right)x^3dx=3\cdot\frac{1}{4}\left(\int 4x^3dx\right)=\frac{3}{4}\left(x^4+c\right)=\frac{3}{4}x^4+c$$ → (se deja la misma c).

c) Suma de funciones:

$$\int\left(4x^3-2x\right)dx=\int 4x^3dx-\int 2xdx=\left(x^4+c_1\right)-\left(x^2+c_2\right)=x^4-x^2+c$$ (las constantes c_1 y c_2 no son necesarias; basta con poner una sola c).

d) Sabiendo que $\int\cos xdx=\sin x+c$ y que $\int e^xdx=e^x+c$ (recuerda las derivadas de l a función seno y de la exponencial), se obtienen:

→ $\int k\cos xdx=k\sin x+c\ \Rightarrow\ \int\left(-3\cos x\right)dx=-3\sin x+c$

→ $\int\frac{\cos x}{k}dx=\frac{\sin x}{k}+c\ \Rightarrow\ \int\frac{\cos x}{5}dx=\frac{1}{5}\sin x+c$

→ $\int pe^xdx=pe^x+c\ \Rightarrow\ \int 2e^xdx=2e^x+c$; $\int\frac{1}{5}e^xdx=\int\frac{e^x}{5}dx=\int\frac{e^xdx}{5}=\frac{1}{5}e^x+c$

→ $\int\left(3\cos x-2e^x\right)dx=3\int\cos xdx-2\int e^xdx=3\sin x-2e^x+c$

- Las propiedades anteriores se utilizan según convenga, de dentro a fuera o de fuera a dentro. Así, por ejemplo:

$$18\int\frac{1}{3x+1}dx=6\cdot 3\int\frac{1}{3x+1}dx=6\int\frac{3}{3x+1}dx=6\left(\ln(3x+1)+c\right)=6\ln(3x+1)+c$$

Siempre se buscará un integrando del que se sepa hallar la primitiva.

Igualmente:

$$8\int\left(x^3-x\right)dx=8\int x^3dx-8\int xdx=2\int 4x^3dx-4\int 2xdx=2x^4-4x^2+c$$

1.4. Relación de integrales inmediatas

Las integrales de las funciones usuales, que conviene saber de memoria, son las siguientes. (Para agilizar la escritura, y por falta de espacio, cuando en la función compuesta se escribe *f* debería escribirse $f(x)$; por lo mismo, en todos los casos se omite la constante de integración, *c*).

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
Función simple	**Función compuesta**	**Ejemplos**
$\int k dx = kx$		$\int dx = x$; $\int (-4)dx = -4x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$	$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$; $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}$	$\int \frac{f'}{2\sqrt{f}} dx = \sqrt{f}$	$\int \frac{10x-3}{2\sqrt{5x^2-3x}} dx = \sqrt{5x^2-3x}$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f$	$\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \ln(x^3+1)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$	$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}$; $\int 3^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{3^{x^2}}{\ln 3}$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$	$\int e^{x^2} \cdot 2x dx = e^{x^2}$; $\int e^{-3x}(-3) dx = e^{-3x}$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$	$\int 5\cos(5x-2) dx = \sin\ (5x-2)$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f dx = -\cos f$	$\int 6x^2 \sin\left(2x^3\right) dx = -\cos\left(2x^3\right)$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ $\int (1+\tan^2 x) dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f$ $\int (1+\tan^2 f) \cdot f' dx = \tan f$	$\int \frac{4}{\cos^2 4x} dx = \tan 4x$ $\int \left(1+\tan^2(3x+2)\right) \cdot 3 dx = \tan(3x+2)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f$	$\int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx = \arcsin\ (\ln x)$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$	$\int \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arccos e^x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$	$\int \frac{4}{1+(4x)^2} dx = \arctan\ 4x$

Ejemplos:

a) $\int (3+x)^4 dx = \frac{(3+x)^5}{5} + c$ b) $\int (2x-3)e^{x^2-3x} dx = e^{x^2-3x} + c$

c) $\int (2x^3-1)^5 \cdot 6x^2 dx = \frac{(2x^3-1)^6}{6} + c$ d) $\int \frac{2x}{x^2+6} dx = \ln(x^2+6) + c$

e) $\int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c$ $\to$ Observa: $\int f^2 \cdot f' dx = \frac{f^3}{3}$, con $f = \sin x$

2. Técnicas y métodos de integración

Cuando el cálculo de una integral no sea inmediato, cuando el integrando no coincida con alguna de las fórmulas anteriores, se recurrirá a algún método de integración.
Estos métodos son procedimientos que permiten escribir el integrando inicial en otro equivalente cuya integral sea más sencilla de calcular.

2.1. Descomposición elemental

Consiste en transformar el integrando mediante operaciones algebraicas básicas, como: multiplicar o dividir por una constante apropiada; sumar o restar un número u otra expresión; efectuar las operaciones indicadas… (Para que esas operaciones tengan sentido hay que tener presentes las fórmulas de las integrales inmediatas; y, obviamente, las propiedades de la integral).

Ejemplos:

a) $\int \left(6x^2+5x-1\right)dx$ $\to$ Se descompone en suma de integrales.

$$\int \left(6x^2+5x-1\right)dx = 2\int 3x^2dx + \frac{5}{2}\int 2xdx - \int dx = 2x^3+\frac{5}{2}x^2 - x + c$$

b) $\int \left(x^2-3\right)^2 dx$ $\to$ Se hace el cuadrado de la expresión.

$$\int \left(x^2-3\right)^2 dx = \int \left(x^4-6x^2+9\right)dx = \int x^4dx - \int 6x^2dx + \int 9dx = \frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x + c$$

c) $\int \frac{5x^2+4x-3}{x^2}dx$ $\to$ Se hace la división del integrando.

$$\int \frac{5x^2+4x-3}{x^2}dx = \int \left(5+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx = \int 5dx + 4\int \frac{1}{x}dx - 3\int x^{-2}dx = 5x + 4\ln x + \frac{3}{x} + c$$

d) $\int \frac{4}{5-6x}dx$ $\to$ Se ajustan las constantes buscando la integral del logaritmo: $\int \frac{-6}{5-6x}dx$.

$$\int \frac{4}{5-6x}dx = 4\cdot\frac{-1}{6}\int \frac{-6}{5-6x}dx = -\frac{4}{6}\ln(5-6x) + c$$

e) $\int \frac{5+4x}{1+x^2}dx$ $\to$ Se observa que *puede* tener que ver con un arcotangente y un logaritmo, pues:

$$\int \frac{5+4x}{1+x^2}dx = \int \left(\frac{5}{1+x^2}+\frac{4x}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{5}{1+x^2}dx + \int \frac{4x}{1+x^2}dx =$$

$$= 5\int \frac{1}{1+x^2}dx + 2\int \frac{2x}{1+x^2}dx = 5\arctan x + 2\ln(1+x^2) + c$$

- Para aplicar este método es necesario conocer muy bien las fórmulas de integrales inmediatas. (Además hay que tener "suerte" y paciencia, pues no siempre que se hace una transformación da el resultado apetecible. Con frecuencia hay que volver a intentarlo o recurrir a otro método). También es imprescindible operar con soltura, como se pone de manifiesto en los tres ejemplos siguientes.

Ejemplos:

a) Para hallar $\int \sin^3 x dx$ hay que conocer algunas equivalencias trigonométricas. Hay que saber que: $\sin^3 x = (\sin x)^3 = (\sin x)(\sin x)^2$; $(\sin x)^2 = 1-(\cos x)^2$.

(Naturalmente también se puede emplear la notación $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot (1-\cos^2 x)$).

Por tanto:

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot (\sin x)^2 dx = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x) dx = \int \sin x dx + \int (-\sin x)\cos^2 x dx =$$

$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$ (En la 2ª integral se aplica la fórmula $\int f' \cdot f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c$.)

b) Para calcular $\int \frac{1}{3+x^2} dx$ es imprescindible saber que $\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$.

El elemento fundamental es que aparece el término $3+x^2$, que no es descomponible en factores, y que obviamente se parece mucho a $1+x^2$. El objetivo es transformar la expresión $\frac{1}{3+x^2}$ en otra igual a ella, de la forma $\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$.

El proceso puede ser el siguiente:

$$\frac{1}{3+x^2} = \frac{1}{3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)} = \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{3}/\sqrt{3}}{3\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1/\sqrt{3}}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Se ha conseguido el propósito, siendo $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Por tanto:

$$\int \frac{1}{3+x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

c) Para calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$ debe saberse que $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \arcsin f(x) + c$.

El elemento fundamental es que aparece la raíz cuadrada y el término $-(x-1)^2$; de donde puede suponerse que $f(x)$ está relacionada con el término $(x-1)$.

A continuación hay que saber transformar la expresión buscando que aparezca $1-(f(x))^2$ en el interior de la raíz y $f'(x)$ en el numerador. El proceso puede ser el siguiente:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{9\left(1-\frac{(x-1)^2}{9}\right)}} dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}} dx =$$

$= \arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right) + c \rightarrow$ Compruébese, derivando, que el resultado es correcto.

2.2. Integración de fracciones racionales: descomposición en fracciones simples

Las fracciones racionales son de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.
Si el denominador es de grado menor o igual que el numerador, la expresión anterior puede escribirse así: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, donde $C(x)$ y $R(x)$ son, respectivamente, el cociente y el resto de la división. (Como debe saberse, el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$)
Con esto: $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$.
La integral que puede presentar dificultades es la última. Aquí se resolverá en dos supuestos fáciles, cuando $Q(x)$ sea un polinomio de grado 1 o 2:

(1) $\displaystyle\int \frac{m}{ax+b}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

- La integral (1) es inmediata (se resuelve por descomposición simple), pues:
$$\int \frac{m}{ax+b}dx = \frac{m}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \left(\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x)\right) = \frac{m}{a}\ln(ax+b)+c$$

Ejemplos:
a) $\displaystyle\int \frac{3}{7x-4}dx = \frac{3}{7}\int \frac{7}{7x-4}dx = \frac{3}{7}\ln(7x-4)+c$

b) Para hallar $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1}dx$ hay que dividir antes (el método de Ruffini es adecuado).

Se obtiene: $\dfrac{2x^3-3x+2}{x+1} = 2x^2-5x+5+\dfrac{-3}{x+1}$

De donde $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1}dx = \int\left(2x^2-5x+5+\frac{-3}{x+1}\right)dx = \int\left(2x^2-5x+5\right)dx + \int \frac{-3}{x+1}dx$

Por tanto:
$$\int \frac{2x^3-3x+2}{x+1}dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x - 3\ln(x+1)+c$$

- Para resolver la integral (2) hay que determinar las raíces de $ax^2+bx+c=0$, y pueden darse tres casos, que dependen de que esas raíces sean: dos simples, una doble o complejas:

<u>Caso 1</u>. Si hay dos raíces reales simples: $x = x_1$, $x = x_2 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

La descomposición que se hace es: $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \dfrac{A}{a(x-x_1)} + \dfrac{B}{(x-x_2)}$.

Con esto, $\displaystyle\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A}{a(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx = \frac{A}{a}\ln(x-x_1) + B\ln(x-x_2)+c$

Los valores de A y B, que son números, se determinan por el llamado método de *identificación de coeficientes*. Se ve con un ejemplo.

Ejemplo:

Para hallar la integral $\int \frac{2x}{x^2+x-2}dx$ se procede así:

– Se hallan las raíces de $x^2+x-2=0$. Son $x = 1$ y $x = -2$.
Por tanto, la descomposición en fracciones simples será:

$$\frac{2x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow 2x = A(x+2)+B(x-1)$$

El método de *identificación de coeficientes* consiste en igualar los coeficientes de los términos del mismo grado de ambos miembros de la igualdad. Esto es:

$$2x = A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow 2x+0=(A+B)x+2A-B \Rightarrow \begin{cases} 2 = A+B \\ 0 = 2A-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/3 \\ B = 4/3 \end{cases}$$

Con esto:

$$\int \frac{2x}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2/3}{x-1}dx + \int \frac{4/3}{x+2}dx = \frac{2}{3}\ln(x-1)+\frac{4}{3}\ln(x+2)+c$$

Observación:
Una alternativa para calcular A y B consiste en dar valores a x e igualar los resultados de los dos miembros de la igualdad inicial: $2x = A(x+2)+B(x-1)$

si $x = 1$: $2 = 3A$ $\Rightarrow A = 2/3$
si $x = -2$: $-4 = -3B$ $\Rightarrow B = 4/3$

A x se le pueden dar dos valores cualesquiera, pero los más cómodos son los de las ráices.

Caso 2. Si hay una sola raíz real doble, $x = x_1 \Rightarrow ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.

Se hace la descomposición: $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{a(x-x_1)^2}+\frac{B}{(x-x_1)}$.

Con esto, $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A}{a(x-x_1)^2}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx = \frac{-A}{a(x-x_1)}+B\ln(x-x_2)+c$

Ejemplo:

$$\int \frac{x-2}{x^2+4x+4}dx$$

– La ecuación $x^2+2x+4=0$ tiene una sola raíz doble, $x = -2$, doble. Por tanto:

$$\frac{x-2}{x^2+4x+4}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A+B(x+2)}{(x+2)^2} \Rightarrow x-2 = A+B(x+2)$$

Se identifican coeficientes:

$$x-2 = Bx+A+2B \Rightarrow \begin{cases} 1 = B \\ -2 = A+2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = -4 \end{cases}$$

Luego,

$$\int \frac{x-2}{x^2+4x+4}dx = \int \frac{-4}{(x+2)^2}dx + \int \frac{1}{x+2}dx = \frac{4}{x+2}+\ln(x+2)+c$$

(Cálculo de A y B dando valores a x:
si $x = -2 \Rightarrow -4 = A \to A = -4$; si $x = 0 \Rightarrow -2 = A + 2B \to B = 1$)

<u>Caso 3</u>. El denominador no tiene raíces reales $\Rightarrow$ ax^2+bx+c es irreducible.

Se hace la descomposición: $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\dfrac{k(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\dfrac{B}{1+(px+q)^2}$,

donde $ax^2+bx+c=1+(px+q)^2$. En todos los casos *A* y *B* o *k*, *p* y *q*, son números reales.

<u>Observación</u>:

Esta descomposición se hace buscando que la integral resulte la suma de un logaritmo y de un arcotangente. Por eso, en la primera fracción se busca el numerador $2ax+b$, que es la derivada de ax^2+bx+c; y en la segunda el denominador se escribe en la forma $1+(px+q)^2$.

Con esto, $\displaystyle\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{k(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\int\frac{B}{1+(px+q)^2}dx=$

$$=k\ln\left(ax^2+bx+c\right)+\frac{B}{p}\arctan\left(px+q\right)+c$$

Ejemplos:

a) $\displaystyle\int\frac{2-x}{x^2+2x+2}dx$

– La ecuación $x^2+2x+2=0$ no tiene raíces reales. Por tanto, se hace la descomposición:

$$\frac{2-x}{x^2+2x+2}=\frac{-\frac{1}{2}\left(2x+2\right)+3}{x^2+2x+2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{3}{1+\left(x+1\right)^2}$$

$\to$ el <u>numerador</u>, $2-x=-\frac{1}{2}\left(2x+2\right)+3$; y que el <u>denominador</u>, $x^2+2x+2=1+(x+1)^2$.

Para obtener esta descomposición se escribe $2-x=k\left(2x+2\right)+B$, siendo el término $2x+2$ la derivada del denominador; después se calculan las constantes mediante la identificación de los coeficientes de ambos miembros. Paso a paso, sería como sigue:

1) Se escribe la derivada del denominador: $\dfrac{2-x}{x^2+2x+2}=\dfrac{k\left(2x+2\right)+B}{x^2+2x+2}$

2) De $2-x=k\left(2x+2\right)+B$ $\Rightarrow$ $2-x=2k+B+2kx$ $\Rightarrow$ $2k=-1\to k=-1/2$; $B=3$.

3) Por tanto,

$$\frac{2-x}{x^2+2x+2}=\frac{-\frac{1}{2}\left(2x+2\right)+3}{x^2+2x+2}=\frac{-\frac{1}{2}\left(2x+2\right)}{x^2+2x+2}+\frac{3}{x^2+2x+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2-x}{x^2+2x+2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{3}{1+\left(x+1\right)^2}$$

En definitiva:

$$\int\frac{2-x}{x^2+2x+2}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+3\int\frac{1}{1+(x+1)^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+3\arctan(x+1)+c$$

b) $\displaystyle\int\frac{3x+2}{9x^2-12x+5}dx=\int\frac{\frac{1}{6}\left(18x-12\right)+4}{9x^2-12x+5}dx=\frac{1}{6}\int\frac{18x-12}{9x^2-12x+5}dx+\int\frac{4}{1+\left(3x-2\right)^2}dx=$

$$=\frac{1}{6}\ln(9x^2-12x++5)+\frac{4}{3}\arctan(3x-2)+c$$

2.3. Ampliación: $Q(x)$ es un polinomio de tercer grado

La descomposición de la fracción racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simples puede hacerse para cualquier grado del denominador $Q(x)$, aunque su aplicación resulta más engorrosa. Aquí se aplicará para polinomios de grado 3, que supondremos descompuestos en factores como sigue:

Caso 1. El denominador tiene tres raíces reales simples: $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

La descomposición que se hace es:

$$\frac{mx^2+nx+r}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{A}{(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)}+\frac{C}{(x-x_3)}, \text{ con } A, B, C \in \mathbf{R}.$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x^2+6}{x^3+2x^2-3x}dx$$

Como $x^3+2x^2-3x=x(x-1)(x+3)$ se hace la descomposición:

$$\frac{x^2+6}{x^3+2x^2-3x}=\frac{x^2+6}{x(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B+C)x^2+(2A+3B-C)x-3A}{x(x-1)(x+3)}$$

Como los numeradores de la primera y última fracción deben ser iguales, se deduce que

$$x^2+6=(A+B+C)x^2+(2A+3B-C)x-3A$$

Identificando coeficientes se obtiene el sistema: $\begin{cases} A+B+C=1 \\ 2A+3B-C=0 \\ -3A=6 \end{cases} \Rightarrow A=-2;\ B=7/4,\ C=5/4$

Por tanto,

$$\int \frac{x^2+6}{x^3+2x^2-3x}dx = \int\left(\frac{-2}{x}+\frac{7/4}{x-1}+\frac{5/4}{x+3}\right)dx=-2\ln x+\frac{7}{4}\ln(x-1)+\frac{5}{4}\ln(x+3)+c$$

Caso 2. El denominador tiene raíces reales repetidas. Esto es: $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)^2$.

La descomposición que se hace es:

$$\frac{mx^2+nx+r}{(x-x_1)(x-x_2)^2}=\frac{A}{(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)^2}+\frac{C}{(x-x_2)}, \text{ con } A, B, C \in \mathbf{R}.$$

Ejemplo:

$\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^3+2x^2+x}dx \to$ Como $x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$ se hace la descomposición:

$$\frac{2x-5}{x^3+2x^2+x}=\frac{2x-5}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx+Cx(x+1)}{x(x+1)^2}=\frac{(A+C)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$$

Igualando los numeradores primero y último, $2x-5=(A+C)x^2+(2A+B+C)x+A$, se tiene: $A=-5$; $B=-7$, $C=5$.

Por tanto,

$$\int \frac{2x-5}{x^3+2x^2+x}dx = \int\left(\frac{-5}{x}+\frac{15}{(x+1)^2}+\frac{5}{x+1}\right)dx = -5\ln x + 5\ln(x+1) - \frac{7}{x+1} + c$$

Caso 3. El denominador tiene raíces reales y complejas. Esto es:
$Q(x) = (x-x_1)(ax^2+bx+c)$, con el segundo factor irreducible.
La descomposición que se hace es:

$$\frac{mx^2+nx+r}{(x-x_1)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+x)}$$, con A, B, $C \in$ **R**.

La integral de la segunda fracción se hace como se indicó anteriormente (también caso 3))

Ejemplo:

$$\int \frac{6x^2-5x+22}{(x-2)(x^2+2x+10)}dx$$

Como $x^2+2x+10=0$ no tiene raíces reales se hace la descomposición:

$$\frac{6x^2-5x+22}{(x-2)(x^2+2x+10)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+10)} =$$

$$= \frac{A(x^2+2x+10)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+10)} = \frac{(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+10A-2B}{(x-2)(x^2+2x+10)}$$

Con esto, $6x^2-5x+22 = (A+B)x^2+(2A-2B+C)x+10A-2B$.

Identificando coeficientes: $\begin{cases} A+B=6 \\ 2A-2B+C=-5 \\ 10A-2C=22 \end{cases} \Rightarrow A = 2;\ B = 4,\ C = -1.$

Por tanto,

$$\int \frac{6x^2-5x+22}{(x-2)(x^2+2x+10)}dx = \int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{4x-1}{x^2+2x+10}\right)dx = 2\ln(x-2) + \int \frac{4x-1}{x^2+2x+10}dx$$

La última integral es como la del Caso 3 del apartado anterior, pues teniendo en cuenta que $x^2+2x+10 = 9+(x+1)^2$, puede escribirse:

$$\frac{4x-1}{x^2+2x+10} = \frac{2(2x+2)-5}{x^2+2x+10} = \frac{2(2x+2)}{x^2+2x+10} - \frac{5}{9+(x+1)^2} .$$

De donde

$$\int \frac{4x-1}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{2(2x+2)}{x^2+2x+10}dx - \int \frac{5}{9+(x+1)^2}dx = 2\ln(x^2+2x+10) - \frac{5}{3}\arctan\frac{x+1}{3}$$

$\rightarrow$ La segunda integral se transforma como sigue:

$$\int \frac{5}{9+(x+1)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{5}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{5\cdot 3\cdot\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}dx = \frac{5}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}dx \rightarrow \uparrow$$

En consecuencia, la integral inicial

$$\int \frac{6x^2-5x+22}{(x-2)(x^2+2x+10)}dx = 2\ln(x-2) + 2\ln(x^2+2x+10) - \frac{5}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + c$$

3. Método de integración por partes

Este método suele ser apropiado cuando en el integrando figuran funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas multiplicadas entre ellas o por expresiones polinómicas.
El método consiste en descomponer el integrando en dos partes: una de ellas se llama *u*; la otra, que se designa por *dv*, suele ser el mayor trozo (la mayor parte) del integrando que pueda integrarse fácilmente. Una vez integrada *dv* surgirá otra integral que deberá ser más sencilla que la inicial.
El esquema es el siguiente: $\int udv = uv - \int vdu$

Está fórmula se obtiene a partir de la propiedad de la diferencial del producto de dos funciones, $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Así:

$$d\big(f(x)\cdot g(x)\big) = d\big(f(x)\big)\cdot g(x) + f(x)\cdot d\big(g(x)\big) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

(Recuérdese que $df(x) = f'(x)dx$).
Despejando:

$$f(x)g'(x)dx = d\big(f(x)\cdot g(x)\big) - f'(x)g(x)dx.$$

Integrando miembro a miembro se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = \int d\big(f(x)\cdot g(x)\big) - \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

O de manera esquemática:

$$d(u\cdot v) = d(u)\cdot v + u\cdot d(v) = vdu + udv \ \Rightarrow udv = d(u\cdot v) - vdu\,) \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

Observación: Para la elección de las partes *u* y *dv* no hay un criterio concreto; pero, como se ha indicado más arriba, puede ser recomendable tomar *dv* como la parte más grande del integrando que se pueda integral de forma inmediata. El resto del integrando será *u*.

Ejemplo:
a) Para integral $\int x(\sin x)\,dx$ pueden tomarse las siguientes partes:

(1) $u = x$ y $dv = \sin x dx \Rightarrow du = dx$; $v = \int \sin x dx = -\cos x$

(2) $u = \sin x$ y $dv = xdx \Rightarrow du = \cos x dx$; $v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2}$

(3) $u = x\sin x$ y $dx = dv \Rightarrow du = (\sin x + x\cos x)\,dx$; $v = \int dx = x$

Si se hace (1): $\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$

Si se hace (2): $\int x\sin x dx = \sin x\cdot\dfrac{x^2}{2} - \int \dfrac{x^2}{2}\cos x dx$ (La segunda integral es más complicada que la primera. Por tanto, esta partición no es acertada).

Si se hace (3): $\int x\sin x dx = x\sin x\cdot x - \int x(\sin x + x\cos x)\,dx$ (También la segunda integral es más complicada que la inicial. Tampoco es acertada esta partición).

Otros ejemplos:

a) $\int xe^x dx$.

Tomando: $u = x \Rightarrow du = dx$; $e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$

Se tiene: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

b) $\int x^2 \ln x dx$

Haciendo: $u = \ln x$ y $dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

Por tanto: $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$

c) Para calcular $\int e^x \cos x\, dx$ hay que reiterar el método. Observa:

Haciendo $u = e^x$ y $\cos x dx = dv \Rightarrow du = e^x dx$; $v = \sin x dx$

Luego: $\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$.

La segunda integral, $\int e^x \sin x\, dx$, también debe hacerse por el método de partes.

Tomando: $u = e^x$ y $\sin x dx = dv \Rightarrow du = e^x dx$; $v = -\cos x$

Por tanto,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \boxed{\int e^x \sin x\, dx} = e^x senx - \boxed{\left(e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \Rightarrow \text{(trasponiendo la integral)}$$

$$\Rightarrow 2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Despejando se tiene: $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$

d) Para hallar $\int x \ln(1+x^2) dx$ hay que aplicar el método de partes y el de descomposición en fracciones.

Primero partes. Se hace: $u = \ln(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} dx$; $xdx = dv \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Luego,

$$\int x \ln(1+x^2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \text{(descomponiendo en fracciones)}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

4. Integración por cambio de variable

Consiste en hacer un cambio de variable ($x = g(t)$ o $t = h(x)$, según convenga) de manera que la integral inicial resulte más fácil de calcular.
El proceso es el siguiente.
Si se desea hallar la integral $\int f(x)dx$, si se hace $x = g(t) \Rightarrow dx = g´(t)dt$.

Con esto, puede escribirse: $\int f(x)dx = \int f(g(t))g´(t)dt$

Una vez resuelta la integral en la variable *t* hay que deshacer el cambio inicial, pues la solución debe darse en función de *x*.

Ejemplos:

a) Para calcular $\int (2x-3)^5 dx$ puede hacerse el cambio:

$$t = 2x-3 \Rightarrow t^5 = (2x-3)^5;\ dt = 2dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$$

Con esto, sustituyendo,

$$\int \left(2x-3\right)^5 dx = \int t^5\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\int t^5 dt = \frac{1}{12}t^6 + c = \frac{1}{12}\left(2x-3\right)^6 + c$$

Observación: En este caso no es imprescindible cambiar de variable, pues ajustando constante y aplicando la fórmula $\int f^n \cdot f´dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}$, se tiene:

$$\int \left(2x-3\right)^5 dx = \frac{1}{2}\int 2\left(2x-3\right)^5 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2x-3\right)^6}{6} + c = \frac{1}{12}\left(2x-3\right)^6 + c$$

b) Para calcular $\int e^{4x}dx$, si se hace: $u = 4x \Rightarrow du = 4dx \rightarrow dx = \frac{1}{4}du$

Sustituyendo los cambios se tiene: $\int e^{4x}dx = \int e^u \cdot\left(\frac{1}{4}du\right) = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + c = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

c) La integral $\int \frac{4}{5-6x}dx$, hecha anteriormente mediante ajuste de constantes, se puede resolver haciendo el cambio: $t = 5-6x \Rightarrow dt = -6dx \rightarrow dx = -\frac{1}{6}dt$

Luego, $\int \frac{4}{5-6x}dx = \int \frac{4}{u}\left(-\frac{1}{6}dt\right) = -\frac{4}{6}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{4}{6}\ln t + c - \frac{4}{6}\ln\left(5-6x\right) + c$

d) Para hallar $\int x\sqrt{1+x}dx$ puede hacerse: $1 + x = u^2 \Rightarrow x = u^2 - 1;\ dx = 2udu$

Luego, $\int x\sqrt{1+x}dx = \int \left(u^2-1\right)u\cdot\left(2udu\right) = \int \left(2u^4 - 2u^2\right)du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + c$

Deshaciendo el cambio, $1 + x = u^2 \Rightarrow u = \sqrt{1+x}$, se tendrá

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{5}\sqrt{(1+x)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + c$$

4.1. Cambios de variable para integrales trigonométricas

Los cambios más frecuentes son:

1) Si el integrando es una función $f(x)$ *impar* en cos *x*, se hace el cambio sen *x* = *t*.
(Una función es impar en cos *x* cuando al cambiar cos *x* por – cos *x* la expresión cambia de signo. Por ejemplo, $f(x)=\cos^3 x$.)
Así se obtienen las siguientes equivalencias:

$$\sin x = t \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}\ ;\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Rightarrow \cos x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ejemplo:

$$\int\left(\cos^5 x\right)dx = \int\left(\cos^4 x\right)\cdot\left(\cos x dx\right) = \int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^4 dt = \int(1-t^2)^2 dt =$$

$$= \int(1-2t^2+t^4)dt = t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+c = \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+c$$

2) Si el integrando es una función $f(x)$ *impar* en sen *x*, se hace el cambio cos *x* = *t*.
(Una función es impar en sen *x* cuando al cambiar sen *x* por – sen *x* la expresión cambia de signo. Por ejemplo, $f(x)=\sin^3 x$.)
Así se obtiene las siguientes equivalencias:

$$\cos x = t \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}\ ;\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$$

$$\Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ejemplo:

$$\int\left(\sin^3 x\right)\left(\cos^2 x\right)dx = -\int\left(\sin^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x\right)\cdot\left(-\sin x\right)dx = -\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 t^2 dt = \int(1-t^2)t^2 dt =$$

$$= \int(t^2-t^4)dt = \frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+c = \frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c$$

3) Si el integrando no cambia al sustituir sin *x* por – sin *x* y cos *x* por – cos *x*, se hace el cambio tan *x* = *t*.
Así se obtiene las siguientes equivalencias:

$$\tan x = t \Rightarrow 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow (1+\tan^2 x)dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x\cdot\cos x \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ejemplo:

Para integrar $\int\left(\tan^3 x\right)dx$, haciendo tan $x = t$ se tiene:

$$\int\left(\tan^3 x\right)dx = \int t^3\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int\frac{t^3}{1+t^2}\,dt$$

Esta segunda integral se hace por descomposición, pues dividiendo: $\dfrac{t^3}{1+t^2} = t - \dfrac{t}{1+t^2}$

Con esto, $\displaystyle\int\frac{t^3}{1+t^2}\,dt = \int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+c$

Deshaciendo el cambio inicial, se tiene:

$$\int\left(\tan^3 x\right)dx = \frac{\tan^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)+c = \frac{\tan^2 x}{2}+\ln\left(\cos x\right)+c$$

4) <u>En todos los casos</u> puede hacerse el cambio <u>tan *x*/2 = *t*</u>.
Así se obtiene las siguientes equivalencias:

$$\tan\frac{x}{2}=t \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx = dt \;\Rightarrow\; dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

De $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \Rightarrow \sin\dfrac{x}{2}=\tan\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; $1+\tan^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\cos^2(x/2)} \;\Rightarrow\; \cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{1+t^2}$.

Luego, $\sin x = 2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)\left(\cos\dfrac{x}{2}\right) = 2\tan\dfrac{x}{2}\cdot\cos^2\dfrac{x}{2} \;\Rightarrow\; \sin x = 2t\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

Como $\tan x = \dfrac{2\tan(x/2)}{1-\tan^2(x/2)} \;\Rightarrow\; \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\cos x = \dfrac{\sin x}{\tan x} \;\Rightarrow\; \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Ejemplo:

Para integrar $\displaystyle\int\frac{1}{1-\sin x}\,dx$, haciendo $\tan\dfrac{x}{2}=t$ se tiene:

$$\int\frac{1}{1-\sin x}\,dx = \int\frac{1}{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int\frac{2}{(1-t)^2}\,dt = \frac{2}{1-t}+c \;\Rightarrow\; \int\frac{1}{1-\sin x}\,dx = \frac{2}{1-\tan\dfrac{x}{2}}+c$$

4.1. Otros cambios y transformaciones

Las técnicas de integración son numerosísimas; si el lector está interesado puede buscar en cualquier libro de grado superior: los clásicos <u>*Cálculus*</u>. Aquí, a modo de apunte, se hacen dos ejemplos más para mostrar la gran diversidad de *trucos* de integración.

Ejemplos:

a) Para integrar $\int\left(\sin^2 x\right)dx$ puede recurrirse a la equivalencia $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$,

obteniéndose:

$$\int\left(\sin^2 x\right)dx = \int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \int\frac{1}{2}\,dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + c$$

(La última expresión se obtiene escribiendo $\sin 2x = 2\sin x \cos x$).

Observación: Las transformaciones de las expresiones trigonométricas, mediante otras equivalentes, es un recurso que debe tenerse en cuenta.

b) Para integrar $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ puede hacerse el cambio $x = \cos t$, obteniéndose:

$$x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt;\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t$$

Por tanto:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sin t \cdot (-\sin t dt) = -\int (\sin^2 t) dt \Rightarrow \text{(por el ejemplo a)}$$

$$-\int (\sin^2 t) dt = -\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t \cos t\right) + c = -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\cdot x + c$$

Téngase en cuenta que $x = \cos t \Rightarrow t = \arccos x$.

- Por último conviene observar que los métodos de integración no son rígidos, pues puede llegarse al mismo resultado por distintos procedimientos. Así, algunas veces se utilizan cambios de variable que resultan innecesarios; y viceversa, otras veces, un cambio de variable facilita mucho la integración. Véanse un par de ejemplos.

Ejemplos:

a) La integrar $\int (\sin^2 x)\,dx$ puede resolverse también por el método de partes.

Si se escribe $\int (\sin^2 x)\,dx = \int (\sin x)\cdot(\sin x dx)$ y se toma:

$$u = \sin x \text{ y } \sin x dx = dv \Rightarrow du = \cos x dx;\ v = -\cos x$$

Luego:

$$\int (\sin^2 x)\,dx = \sin x\cdot(-\cos x) - \int (-\cos x)\cos x dx = \sin x\cdot(-\cos x) + \int (\cos^2 x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (\sin^2 x)\,dx = \sin x\cdot(-\cos x) + \int \left[1-(\sin^2 x)\right]dx = -\sin x\cdot\cos x + \int 1\cdot dx - \int (\sin^2 x) dx$$

La última integral es la misma que la inicial; si se traslada de miembro se obtiene:

$$2\cdot\int (\sin^2 x)\,dx = -\sin x\cdot\cos x + \int 1\cdot dx = -\sin x\cdot\cos x + x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (\sin^2 x)\,dx = \frac{1}{2}(-\sin x\cdot\cos x + x + c) = -\frac{\sin x\cdot\cos x}{2} + \frac{x}{2} + c$$

b) La integral $\int \frac{e^x}{2+e^x}dx$ puede hacerse:

– Mediante el cambio $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$.

Por tanto: $\int \frac{e^x}{2+e^x}dx = \int \frac{1}{2+t}dt = \ln(2+t) + c = \ln(2+e^x) + c$

–Directamente, si se observa que el numerador es la derivada del denominador y, por tanto, la integral es un logaritmo.