PROBLEMAS DE MATRICES Y DETERMINANTES

1. Peguntas de tipo test

1. (P12). Las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y sus traspuestas, A^t y B^t, cumplen:

a) $(A\cdot B)^t = A^t\cdot B^t$. b) $(A\cdot B)=B^t\cdot A^t$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

En este caso se cumple b), pues:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.\quad B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

La respuesta es b).

2. (P12). Las matrices P que conmutan con $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ son de la forma:

a) $P=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$ b) $P=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & -b\end{pmatrix}$

c) Ninguna de las anteriores, la matriz P debe ser: $P=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Solución:

Si $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ -c & -d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2a-b\\ c & 2c-d\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+2c=a \quad \to c=0\\ -c=c\\ b+2d=2a-b\to d=a-b\\ -d=2c-d\end{cases}\Rightarrow \text{La matriz } P=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a-b\end{pmatrix}.$$

La respuesta es a)

3. (P12). Sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ verifica la igualdad $A^3-I=O$, con I matriz identidad y O matriz nula (<u>no hace falta comprobarlo</u>), entonces, puede asegurase que:

a) $A^{13}=O$. b) $A^{14}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Si $A^3-I=O\Rightarrow A^3=I\Rightarrow A^{12}=(A^3)^4=I^4=I$. Por tanto:

$A^{13}=A^{12}\cdot A=I\cdot A=A \qquad A^{14}=A^{12}\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2$

Multiplicando se tiene que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación: Aunque no se pide comprobarlo, puede verse que:

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Leftrightarrow A^3 - I = O.$$

La respuesta es b)

4. (S02). La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$ es ortogonal:

a) Si $a = 1$ y b cualquiera.
b) Sólo si $a = -1$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Una matriz A es ortogonal si $A^{-1} = A^t$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\operatorname{sen} b \\ 0 & \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

La matriz A es ortogonal si $a = \pm 1$, cualquiera que sea el valor de b.
La respuesta es a).

5. (E11) El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es 3:

a) Para cualquier valor de $m \neq 1$ y 2.
b) Para cualquier valor de $m \neq 1$ y $\frac{4}{3}$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Haciendo el determinante de A se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} = (m-1)\cdot 2(m-2) + m(1+m-2) = (m-1)(3m-4)$$

El determinante vale 0 cuando $m = 1$ o $m = \frac{4}{3} \Rightarrow$ si $m \neq 1$ y $m \neq \frac{4}{3}$ el rango de la matriz es 3.

6. (S04). La matriz $A = \begin{pmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ a^2-1 & a & 1 \end{pmatrix}$:

a) Tiene rango 3 si $a \neq 1$ y $a \neq -1$. b) Su rango es 2 si $a \neq -1$.
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ a^2-1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2$$

Por tanto:
Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$;
La respuesta es a).

7. (S08). El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & b & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ es dos:

a) Siempre, para todo b. b) Sólo si $b = -1$. c) Si $b = 0$.
Solución:

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$.

Para que el rango de la matriz dada sea 2 es necesario que los menores de orden 3 valgan 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & b & 6 \end{vmatrix} = 6(b+1) = 0 \Rightarrow b = -1; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & b & -1 \end{vmatrix} = -7(b+1) = 0 \Rightarrow b = -1;$$

Si $b \neq -1$ el rango de la matriz es tres.
La respuesta es b).

8. (J09). El rango de $\begin{pmatrix} -2 & p & 1 \\ 1-p & 1 & p \\ 2 & -p & 3 \end{pmatrix}$ es 2:

a) Nunca, para ningún $p \in \mathbf{R}$.
b) Sólo si $p = -1$ o $p = 2$.
c) Siempre, para todo $p \in \mathbf{R}$
Solución:

$\begin{vmatrix} -2 & p & 1 \\ 1-p & 1 & p \\ 2 & -p & 3 \end{vmatrix} = 4(p^2 - p - 2) = 0$ si $p = 2$ o $p = -1$. En estos casos el rango es 2.

La respuesta es b).

9. (J07). El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es:

a) 3, si y sólo si $a \neq 1$. b) 2, si y sólo si $a = 1$. c) 2, para cualquier valor de a.

Solución:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to$ (la columna 3ª es proporcional a la 2ª) $\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ el rango nunca puede ser 3.

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, el rango de la matriz es 2 cualquiera que sea el valor de a.

La respuesta es c).

10. (J13). El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p-1 & p \\ 1-p & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & p \end{pmatrix}$ es 3:

a) Si $p = 0$. b) Si $p = 1$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Si $p = 0$, la matriz es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2, al tener la submatriz $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ determinante no nulo, y tener dos columnas iguales y una nula.

Si $p = 1$, la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2, al tener la submatriz $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinante no nulo, y tener dos columnas iguales y una nula.

La respuesta es c).

11. (J08). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Su rango es 4 si $a \neq 0$. b) Su rango es 3 si $a \neq 1$. c) Su rango es 3 si $a = -1$.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a(1+a) \Rightarrow \text{r}(A) < 4 \text{ si } a = 0 \text{ o } a = -1.$$

Si $a = -1$, el rango de A es 3. Por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$. $\to$ La respuesta es c).

12. P(12). Si B es una matriz cuadrada de dimensión 3 × 3 cuyo determinante vale –1, entonces los determinantes de $5B$ y el de B^2 valen, respectivamente:
a) –5 y 1. b) –15 y –1.
c) Ninguna de las anteriores; sus valores respectivos son: _______.
Solución:
Por las propiedades de los determinantes se tiene:

- $|5B| = 5^3|B| \Rightarrow |5B| = 5^3\cdot(-1) = -125$.
- $\left|B^2\right| = |B|\cdot|B| = (-1)\cdot(-1) = 1$.

La respuesta es c): –125 y 1.

13. (S09). Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ indica la propiedad que no se cumple entre las siguientes:
a) La inversa de A es A^2.
b) $A^{12} = B$.
c) A y B son ortogonales.
Solución:
a) Multiplicando: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Puede observarse que tanto A como A^2 son matrices no singulares (con determinante distinto de 0).
Como $A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, resulta obvio que las matrices A y A^2 son inversas.
b) Como $A^3 = A\cdot A^2 = I \Rightarrow A^{3n} = I \neq B \rightarrow$ falsa
c) Es cierta, pues $A\cdot A^t = I$ y $B\cdot B^t = I$.
La respuesta es b).

14. (S11). Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$, puede afirmarse:
a) Tiene inversa para todo $a \neq 4$.
b) No tiene inversa si $a\cdot b = -4$
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:
$\begin{vmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{vmatrix} = 4 - ab = 0 \Rightarrow ab = 4$. En ese caso no tiene inversa.
Si $a \neq 4$, para $b = 1$ la matriz no tiene inversa.
Si $a\cdot b = -4$, la matriz tiene inversa.
La respuesta es c).

15. (S08). La matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa:

a) Si $a = 0$. b) Cualquiera que sea valor de a. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$|A| = 1 - a^2 = 0 \Rightarrow$ si $a \neq \pm 1$, el rango de A es 3.

La respuesta es c).

16. (S07). La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ posee inversa:

a) Si $x \neq 1$. b) Para todo $x < 0$. c) Para todo $x > 0$.

Solución:

Una matriz posee inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

Por tanto, la matriz A posee inversa cuando $x \neq 1$ y $x \neq 3$.

La respuesta es b).

17. (S03). La matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa:

a) Siempre, para todo valor de a. b) Si $a \neq 0$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$|A| = a(2-a) \neq 0$ si $a \neq 0$ y 2.

La respuesta es c).

18. (J11). La matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & a & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa:

a) Si $a = 0$. b) Si $a = \pm 1$.

c) Ninguna de las anteriores. No tiene inversa si $a =$ _____

Solución:

$|A| = -8 + 2a^2 \Rightarrow$ si $a = \pm 2$, la matriz no tiene inversa.

En los demás casos el rango de A es 3 y sí tendrá inversa.

La respuesta es c): <u>$a = \pm 2$</u>

19. (S07). Sea A una matriz invertible que cumple la relación $(X + A)^2 = X^2 + X \cdot A + I$, donde I es la matriz identidad y X otra matriz multiplicable con A. Entonces, despejando X se obtiene que:

a) $X = A^{-1} - A$

b) $X = A - A^{-1}$

c) Ninguna de las anteriores.

<u>Solución</u>:
Operando se tiene:

$$(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I \quad \Leftrightarrow \quad X^2 + A\cdot X + X\cdot A + A^2 = X^2 + X\cdot A + I \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad A\cdot X + A^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad A\cdot X = I - A^2 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}(I - A^2) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad X = A^{-1} - A$$

20. (J11). Sea A una matriz invertible que cumple la relación $(X-A)^2 = X^2 - X\cdot A + 2I$, donde I es la matriz identidad y X otra matriz multiplicable con A. Entonces, despejando X se obtiene que:
a) $X = A^{-1} - 2I$ **b)** $X = A - 2A^{-1}$
c) Ninguna de las anteriores.
<u>Solución</u>:
Operando se tiene:

$$(X-A)^2 = X^2 - X\cdot A + 2I \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - A\cdot X - X\cdot A + A^2 = X^2 - X\cdot A + 2I \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -A\cdot X + A^2 = 2I \quad \Leftrightarrow \quad A\cdot X = A^2 - 2I \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}(A^2 - 2I) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad X = A - 2A^{-1}$$

21. (J08). Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces la expresión $(A-B)^2 + A(B-A) + (A-B)B = O$ es verdadera:
a) Siempre, para cualquier A y B
b) Si A o B son la matriz identidad.
c) Ninguna de las anteriores.
<u>Solución</u>:

$$(A-B)^2 + A(B-A) + (A-B)B = A^2 - AB - BA + B^2 + AB - A^2 + AB - B^2 = AB - BA$$

Para que $AB - BA = O$ es suficiente con que A o B sean la identidad.
La respuesta es b).

22. (J09). Dadas matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:
Para $m \in \mathbf{R}$, la matriz $A - mI$ admite inversa:
a) Si $m = 3$
b) Para todo $m > 3$
c) Para todo $m < 3$.
<u>Solución</u>:
Operando se tiene:

$$A - mI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{pmatrix}$$

Para que la matriz $A - mI$ tenga inversa es necesario que su determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ 1 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ o } m = 3$$

Por tanto, la matriz $A - mI$ no tendrá inversa cuando $m = 1$ o $m = 3$.
La respuesta es b).

23. (P10). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que *AP* = *PA*, son de la forma:

a) $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. b) $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$.

c) Ninguna de las anteriores. Son matrices de la forma: *P* =

Solución:

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix};\ PA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2c = a \\ -c = c \\ b+2d = 2a-b \\ -d = 2c-d \end{cases} \Rightarrow c = 0,\ d = a-b. \Rightarrow P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

La respuesta es b).

24. (P10). Dada $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz *Y* que verifica $M \cdot Y + M^{-1}Y = I$, siendo *I* la matriz unidad de orden 2, es:

a) $Y = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$. b) $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Ninguna de las anteriores. La solución correcta es: *Y* =

Solución:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pues } M^{-1} = \frac{(M_{ij})^t}{|M|}.$$

Como $M \cdot Y + M^{-1}Y = I \Rightarrow (M + M^{-1})Y = I$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

21. (P10). Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$. Si sabemos que el determinante de la matriz 2*A* es |2*A*| = 8, entonces:

a) $x = -1$ o $x = 3$. b) $x = 0$ o $x = 2$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Propiedad: Si *A* es una matriz cuadrada de orden *n* se cumple que $|kA| = k^n|A|$.

Luego, $|2A| = 2^3|A| = 8|A|$; y como $|2A| = 8 \Rightarrow |A| = 1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$$

La respuesta es b).

Problemas

1. Dadas $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}$, halla dos números *a* y *b* para que se verifique que $a{\cdot}A+b{\cdot}B=C$.

Solución:

Escribiendo la ecuación extendida y operando, se tiene:

$$a\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a & 3a\\ -a & 7a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5b & -2b\\ 4b & -9b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+5b & 3a-2b\\ -a+4b & 7a-9b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+5b=-11 & 3a-2b=12\\ -a+4b=-14 & 7a-9b=41\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}.$$

Puede comprobarse el resultado:

$$2\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -2 & 14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & -6\\ 12 & -27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}.$$

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla otras dos matrices del mismo orden, *X* e *Y*, que cumplan: $\begin{cases}2X-Y=A\\ X+3Y=2B\end{cases}$.

Solución:

Primero conviene resolver el sistema en función de *A* y *B*; después se hacen los cálculos.

Por el método de reducción:

$$\begin{cases}2X-Y=A\\ X+3Y=2B\end{cases}\Rightarrow 2E2\begin{cases}2X-Y=A\\ 2X+6Y=4B\end{cases}\Rightarrow E2-E1\begin{cases}2X-Y=A\\ 7Y=4B-A\end{cases}\Rightarrow Y=\frac{1}{7}(4B-A)$$

Sustituyendo este valor de *Y* en la segunda ecuación inicial, se tiene:

$$X+\frac{3}{7}(4B-A)=2B\ \Rightarrow\ X=\frac{3}{7}A+\frac{2}{7}B$$

Por tanto:

$$X=\frac{3}{7}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}+\frac{2}{7}\cdot\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -15/7\\ 5/7 & -18/7\end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{7}\cdot\left[4\cdot\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & -23/7\\ 3/7 & -8/7\end{pmatrix}$$

3. Para la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}$, calcula el valor de *a* para que $A^2-A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}$.

Solución:

$$A^2-A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}\Leftrightarrow\ A(A-I)=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 0 & -a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a^2-a & -1\\ 0 & a^2+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4; \quad a = -3 \\ a = 4; \quad a = -5 \end{cases}$$

La única solución común es $a = 4$.

4. Demuestra que si las matrices A y B son ortogonales, entonces su producto también es ortogonal.

Solución:

Si A y B son ortogonales $\Rightarrow A \cdot A^t = I$ y $B \cdot B^t = I$.

Para que el producto AB sea ortogonal debe cumplirse que $(AB) \cdot (AB)^t = I$.

Como $(AB) \cdot B^t \cdot A^t = A \cdot (B \cdot B^t) \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$.

5. Halla las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad: $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A$.

Solución:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se desea que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = a \\ b = b \\ c + d = a + c \\ d = b + d \end{cases} \Rightarrow b = 0; a = d; c = c$$

La solución del sistema viene en función de dos indeterminadas, a y c. Luego, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

Una de las matrices es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, que se obtiene dando los valores $a = 3$ y $c = -2$.

6. Calcula la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Halla la solución de dos maneras:

1) Sin calcular la matriz inversa; 2) Calculándola.

Solución:

1) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+5b & a+3b \\ 2c+5d & c+3d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2a + 5b \\ 3 = a + 3b \\ 4 = 2c + 5d \\ 2 = c + 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 5 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) De $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = A$.

Cálculo de la inversa:

$$(M|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\to \underset{(F1)/2}{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\to \underset{F2-5F1}{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & -5/2 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to \underset{2F2}{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 2\end{array}\right)\to \underset{F1-(F2)/2}{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -5 & 2\end{array}\right)=\left(I|M^{-1}\right)$$

Por tanto, $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

7. Halla el valor del parámetro para que cada determinante tome el valor que se indica:

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 4 & m\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=7$ b) $|B|=\begin{vmatrix}0 & a & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{vmatrix}=0$ c) $|C|=\begin{vmatrix}4 & 2 & 2\\ 0 & k & 3\\ 0 & 0 & k\end{vmatrix}=1$

<u>Solución</u>:

a) Desarrollando por la primera columna:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 4 & m\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=7 \Rightarrow 4-3m=7 \Rightarrow m=-1.$$

b) Desarrollando por la primera fila:

$$|B|=\begin{vmatrix}0 & a & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2a+6=0 \Rightarrow a=3.$$

c) El valor de $|C|$ es el producto de los elementos de la diagonal principal, luego $4k^2=1$ y, por tanto, $k=\pm\frac{1}{2}$.

8. Halla, desarrollándolo por la fila 2ª y por la columna 4ª, el valor del determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -3 & 1 & 6\\ 3 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Comprueba que el resultado es el mismo.

<u>Solución</u>:

Por la fila 2ª:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 0\\ \boxed{-2} & 0 & \boxed{1} & 0\\ 5 & -3 & 1 & 6\\ 3 & 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\boxed{(-2)}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 6\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}\boxed{-1}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ 5 & -3 & 6\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=$$

= [2 · (–6) · (–6)] – [(–6) · 18] = 180.

Por la columna 4ª:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & \boxed{6} \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-6}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6\cdot\left(3\cdot(-4) + 2\cdot(-5) + 1\cdot(-8)\right) = -6\cdot(-30) = 180$$

9. Aplicando la fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t$ calcula la inversa de las siguientes matrices, si existe.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$. Adjunta: $\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \left(A_{ij}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puede comprobarse que $A\cdot A^{-1} = I$.

En efecto: $A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1 & -1+1 & -1+1 \\ 1-1 & 1 & -1+1 \\ 1+1-2 & -1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 3 = -4$. Adjunta: $\left(B_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow$ la matriz C no tiene inversa.

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$, halla:

a) Los valores de a para los que la matriz A posea inversa.
b) La inversa de A para $a = 2$.

Solución:

a) La matriz A posee inversa cuando su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 3$$

Por tanto, la matriz A posee inversa cuando $a \neq 1$ y $a \neq 3$.

b) Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1$.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Existe algún valor de $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que A no tenga inversa para ese valor?
b) Calcula, en caso de que sea posible, la matriz inversa de A^2 para $\alpha = 0$.
Solución:
a) La matriz A no tendrá inversa cuando su determinante valga 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - \alpha^2 \Rightarrow |A| \neq 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Por tanto, la matriz A tendrá inversa siempre.

b) Para $\alpha = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -1$.

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

La matriz de los adjuntos es: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esto es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz inversa de A^2 será $\left(A^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Otra alternativa es calcular A^2 y hacer la inversa después.