VECTORES: cuestiones y problemas

Preguntas de tipo test

1. (E11). Los vectores $\bar{u} = (p, 0, -p)$, $\bar{v} = (p, p, 1)$ y $\bar{w} = (0, p, 2)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$:
a) Sólo si $p = 1$ b) Si $p \neq -1$
c) Ninguna de las anteriores, cuando ________.
Solución:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & -p \\ p & p & 1 \\ 0 & p & 2 \end{vmatrix} = p - p^2 = p(1-p) \Rightarrow \text{Forman base cuando } p \neq 0 \text{ y } 1.$$

La solución es c).

2. (S11). Los vectores (1, 0, a), (0, a, –1) y (1, 2, 1) forman base:
a) Si $a = -2$. b) Sólo si $a = 3$. c) Ninguna de las anteriores
Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2 = -(a+1)(a-2) \to \text{Forman base si } a \neq -1, 2$$

La solución es a).

3. (S08). Los vectores (2, 1, –5), (1, –4, 2), (1, 2, a) son linealmente dependientes:
a) Para todo a. b) Si $a = 1/4$. c) Si $a = -4$.
Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -9a - 36 = 0 \text{ para } a = -4.$$

La solución es c).

4. (S05). Los vectores (1, 0, a), (a, 0, 1) y (1, –2, 1) forman base:
a) Si $a = 0$ o $a = 2$. b) Sólo si $a = -1$. c) Ninguna de las anteriores
Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2a^2 = 2(1-a^2). \text{ Vale 0 cuando } a \neq \pm 1$$

La solución es a).

5. (S04). Los vectores $\bar{u} = (1, 0, -1)$, $\bar{v} = (p, p, 1)$ y $\bar{w} = (0, -1, 1)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$:
a) Sólo si $p = ½$. b) Si $p \neq -1/2$. c) Ninguna de las anteriores.
Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ p & p & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2p + 1 \to \text{Forman base si } p \neq -1/2.$$

La solución es b).

6. (S03). Los vectores (1, 0, a), (0, a, –1) y (1, 2, 1) forman base:
a) Si a = –2. b) Sólo si a = 3.
b) Ninguna de las anteriores.
Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2 = -(a+1)(a-2) \rightarrow \text{Forman base si } a \neq -1, 2.$$

La solución es a).

8. (J08). Los vectores (a, 0, 2), (–3, 3, a) y (1, –1, 1) no forman base de $\mathbf{R^3}$:
a) Sólo si a = 0.
b) Si a = 0 o a = –3.
c) Ninguna de las anteriores
Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ -3 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a = a(a+3)$$. Vale 0 cuando a = 0 o –3

La solución es b).

9. (J06). Los vectores (1, 2, 3), (1,0, 1) y (t, t, 2t) son linealmente independientes:
a) Si $t \neq 0$.
b) Para todo valor de t.
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:

El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & t & 2t \end{vmatrix} = 0$, independientemente del valor de t. Luego, nunca son l.i.

La solución es c).

10. (J12). Los vectores $\bar{u}$ = (1, –1, 0), $\bar{v}$ = (0, 0, –1) y $\bar{w}$ = (1, p^2, 1) cumplen:
a) Forman una base para cualquier valor de p.
b) Son todos unitarios (longitud 1) para algún valor de p.
c) Son todos ortogonales dos a dos (perpendiculares) para algún valor de p.
Solución:

Son las filas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & p^2 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es 1+p^2, que es distinto de 0 para cualquier p. Por tanto, forman una base.

Además, $\|\bar{u}\| = \sqrt{2}$, y además $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & p^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & p^2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-p^2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1-p^2 & -1 & 2+p^4 \end{pmatrix}$.

Así pues, $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$.
La respuesta es a)

11. (J11). Los vectores $\overline{u} = (p, 0, 4)$, $\overline{v} = (0, p, 1)$ y $\overline{w} = (1, 0, p)$ son linealmente dependientes:

a) Si $p = \pm 2$. b) Si $p \neq 0$ y $p \neq \pm 2$ c) Siempre, para todo p.

Solución:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 4 \\ 0 & p & 1 \\ 1 & 0 & p \end{vmatrix} = p^3 - 4p \Rightarrow p^3 - 4p = p(p^2 - 4) = 0 \text{ si } p = 0 \text{ o } p = \pm 2.$$

Por tanto, forman base si $p \neq \pm 2$.

La respuesta es a).

12. (P10). Los vectores $(a, 0, 2)$, $(-3, 3, a)$ y $(1, -1, 1)$ cumplen:

a) Forman base de $\mathbf{R}^3$ si $a = 0$ o $a = -3$.

b) Son linealmente independientes si $a > 0$.

c) Dos de ellos son ortogonales si $a = -3$.

Solución:

Los vectores forman base cuando son linealmente independientes; para ello, el determinante asociado debe ser distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ -3 & 3 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a = a(a+3). \text{ Vale 0 cuando } a = 0 \text{ o } -3$$

La respuesta es b).

13. (P12). Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$:

a) El vector $\vec{w} = (-1, 12)$ es independiente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El vector $\vec{w}$ depende linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, pues $\vec{w} = 5\vec{u} + 2\vec{v}$.

c) Ninguna de las anteriores, pues $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales.

Solución:

Es evidente que $\vec{w} = 5\vec{u} + 2\vec{v} \to 5 \cdot (1, 2) + 2 \cdot (-3, 1) = (-1, 12)$

La respuesta es b).

14. (P12). Los vectores $\vec{a} = (3+p,\ -2,\ -1-p)$ y $\vec{b} = (1,\ 3+p,\ -3+p)$ forman un ángulo de $\pi/2$ radianes:

a) Si $p = 1$ b) Si $p \neq -1$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formarán un ángulo de $\pi/2$ radianes cuando su producto escalar valga 0.

$$(3+p,\ -2,\ -1-p) \cdot (1,\ 3+p,\ -3+p) = 3 + p - 6 - 2p + (-1-p)(-3+p) = p - p^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 0 \text{ o } p = 1.$$

La respuesta es a)

Problemas

1. Para $\vec{a} = (1, -2, 3)$ y $\vec{b} = (3, -1, 4)$, halla:

a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $2\vec{a}-\vec{b}$ c) $-\vec{a}+3\vec{b}$ d) $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$

Solución:

a) $\vec{a}+\vec{b} = (1, -2, 3) + (3, -1, 4) = (4, -3, 7)$.

b) $2\vec{a}-\vec{b} = 2 \cdot (1, -2, 3) + (3, -1, 4) = (2 + 3, -4 - 1, 6 + 4) = (5, -5, 10)$.

c) $-\vec{a}+3\vec{b} = -(1, -2, 3) + 3 \cdot (3, -1, 4) = (-1 + 9, 2 - 3, -3 + 12) = (8, -1, 9)$.

d) $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b} = \lambda(1,-2,3)+\mu(3,-1,4)=(\lambda+3\mu, -2\lambda-\mu, 3\lambda+4\mu)$.

2. a) A partir de la definición de dependencia lineal de vectores, demuestra que los vectores $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$ son linealmente independientes.

b) Expresa el vector $\vec{v} = (3, -2, 3)$ en función de los vectores anteriores.

Solución:

Debe comprobarse que la relación $\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$ sólo se cumple cuando $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$.

En efecto:

$$\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(Por Gauss)} \quad \begin{array}{r} \\ \\ E3+E1 \end{array}\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ E3-2E2 \end{array}\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Cuya única solución es $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$.

b) Como los vectores anteriores son linealmente independientes constituyen una base de $\mathbf{R}^3$; en consecuencia, cualquier vector depende linealmente de ellos.

En este caso, hay que encontrar los valores de λ_1, λ_2 y λ_3 tales que:

$$(3, -2, 3) = \lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1)$$

Esto es: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ E3+E1 \end{array}\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ E3-2E2 \end{array}\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ 4\lambda_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = 5/2,\ \lambda_2 = 1/2 \text{ y } \lambda_1 = 1/2$$

Luego, $(3,-2,3)=\frac{1}{2}\cdot(1,0,-1)+\frac{1}{2}\cdot(0,1,2)+\frac{5}{2}\cdot(1,-1,1)$.

3. Dados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 0, -1)$ y $D(-1, 1, 1)$, halla los vectores ***AB***, ***BC*** y ***CD*** y calcula:
a) El módulo de cada uno de ellos.
b) El producto escalar ***AB*** · ***BC***.
c) El ángulo que forman ***AB*** y ***BC***.
Solución:
Los vectores ***AB***, ***BC*** y ***CD*** son:

$\boldsymbol{AB} = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1)$

$\boldsymbol{BC} = (0, 0, -1) - (2, 1, 0) = (-2, -1, -1)$

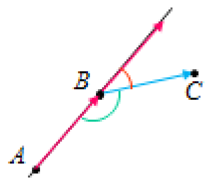
$\boldsymbol{CD} = (-1, 1, 1) - (0, 0, -1) = (-1, 1, 2)$

a) $\boldsymbol{AB} = (1, 1, 1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

$\boldsymbol{BC} = (-2, -1, -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$.

$\boldsymbol{CD} = (-1, 1, 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$.

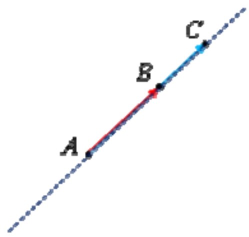
b) $\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{BC} = (1, 1, 1) \cdot (-2, -1, -1) = -2 - 1 - 1 = -4$.



c) $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{-4}{3\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ángulo(***AB*** · ***BC***) = –151,35º → se toma 151,35º; o mejor, 180º – 151,35º = 28,65º.

4. Calcula los valores de a y b para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$ estén alineados.
Solución:



Los puntos A, B y C están alineados cuando los vectores ***AB*** y ***AC*** son proporcionales. Esto es, cuando $\boldsymbol{AB} = k \cdot \boldsymbol{AC}$
Como $\boldsymbol{AB} = (a, 2, b) - (1, 1, 1) = (a - 1, 1, b - 1)$, y
$\boldsymbol{AC} = (1, 0, 0) - (1, 1, 1) = (0, -1, -1)$, debe cumplirse que:

$$(a - 1, 1, b - 1) = k \cdot (0, -1, -1) = (0, -k, -k) \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ 1=-k \\ b-1=-k \end{cases} \Rightarrow k = -1;\ a = 1;\ b = 2.$$

5. a) Estudia, en función del valor del parámetro a, la dependencia e independencia lineal de los vectores $\vec{v}_1 = (a, -a, 1)$, $\vec{v}_2 = (2a, 1, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$.
b) Cuando sean linealmente dependientes, escribe $\vec{v}_3$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.
Solución:

a) Como $\begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 2a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ o $a = -1/2$

Por tanto:
Si $a = -1$ o $a = -1/2$ los vectores son linealmente dependientes → El determinante vale 0.
Si $a \neq -1$ y $a \neq -1/2$ los vectores son linealmente independientes.

b) Para $a = -1$, los vectores son: $\vec{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$.

Luego: $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = -\vec{v}_1$.

Para $a = -1/2$, los vectores son: $\vec{v}_1 = (-1/2, 1/2, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$.

Luego: $\vec{v}_3 = 0 \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{v}_2$

6. a) Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.
b) ¿Cuánto debe valer a para que los vectores $\vec{u} = (2, a, 1)$ y $\vec{v} = (-1, a, 1)$ sean perpendiculares.

Solución:

a) El coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(2,1,1)\cdot(-1,1,1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = 0$$

Los vectores son perpendiculares.

b) Su producto escalar deber ser 0: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Luego,

$$(2, a, 1) \cdot (-1, a, 1) = 0 \Rightarrow -2 + a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

7. Dados los vectores: $\vec{a} = (2, -1, 4)$ y $\vec{b} = (0, 3, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbf{R}$.

a) Halla el valor de λ para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.

b) ¿Cuánto debe valer λ para que $|\vec{b}| = 5$?

Solución:

a) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar vale 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 4) \cdot (0, 3, \lambda) = -3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}.$$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + \lambda^2} = 5 \Rightarrow 9 + \lambda^2 = 25 \Rightarrow \lambda = \pm 4$.