Vectores en el espacio. Producto escalar

1. Espacios vectoriales

1.1. Definición de espacio vectorial

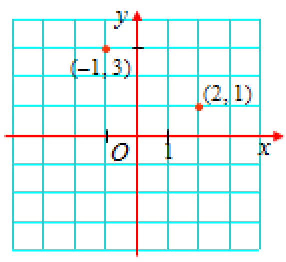
Un conjunto **E** es un espacio vectorial si en él se definen dos operaciones, una interna (suma) y otra externa (producto por números reales, **R**), cumpliendo las siguientes propiedades:

Suma	**Producto por números**
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	5. $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	6. $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	7. $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\overline{0}$	8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$
($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in$ **E**)	(λ, $\mu\in$ **R**)

El vector $\vec{0}$ es el neutro de la suma; $-\vec{a}$ es el opuesto de $\vec{a}$; 1 es el neutro, la unidad, del producto de números reales.
A cualquier elemento de **E** se le llama vector.

- **El espacio vectorial R²**

El conjunto de los puntos del plano, **R²**, es un espacio vectorial. Sus elementos son de la forma (a, b) o (a_1, a_2). Este espacio vectorial es de dimensión 2: largo y ancho. Sus puntos se representan en el plano cartesiano.



Las operaciones suma y producto por números se definen así:

Suma: $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

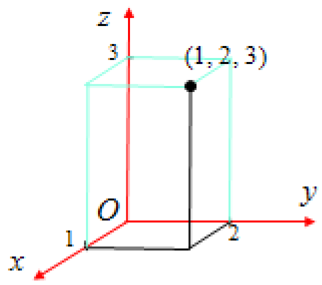
Producto: $\lambda(a_1,a_2)=(\lambda a_1,\lambda a_2)$

Ejemplos:

a) (5, 3) + (–2, 1) = (5 – 2, 3 + 1) = (3, 4).
b) El opuesto de (–3, 5) es –(–3, 5) = (3, –5).
c) El elemento nulo de **R²** es (0, 0).
d) (−2, 4) + 5(3, −1) − 2(−1, 3) = (−2, 4) + (15, −5) − (−2, 6) = (15, −7).

- **El espacio vectorial R³**

El conjunto de los puntos del espacio, **R³**, es un espacio vectorial. Sus elementos son de la forma (a, b, c) o (a_1, a_2, a_3). Este espacio vectorial es de dimensión 3: largo, ancho y alto. Sus puntos se representan en el triedro cartesiano.



Las operaciones suma y producto por números se definen así:

Suma: $(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

Producto: $\lambda(a_1,a_2,a_3)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$

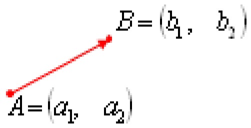
Ejemplos:

a) El elemento nulo de **R³** es (0, 0, 0).
b) El opuesto de (−3, 2, 1) es (3, −2, −1).
c) (2, −7, 0) + 3(−1, 1, 0) – (2, –4, –5) = (2 – 3 – 2, −7 + 3 + 4, 0 + 0 + 5) = (−3, 0, 5).

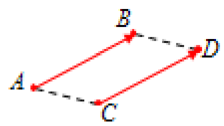
<u>Observaciones:</u>
1) No es difícil demostrar que las operaciones anteriores cumplen las propiedades de espacio vectorial. En todos los casos la demostración se apoya en las propiedades de las operaciones con números reales.
2) Otros espacios vectoriales son: el conjunto de polinomios de grado 2, por ejemplo; el conjunto de matrices de dimensión 2 × 3;…
3) En general, un vector es un conjunto ordenado de números $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Los números a_1, a_2,…, a_n se llaman **componentes** o **coordenadas** del vector. El número de componentes es su **dimensión**.

1.2. Vectores fijos y vectores libres (en el plano y en el espacio)

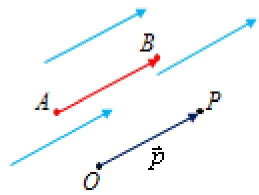
El vector que tiene por origen el punto *A* y por extremo el punto *B*, se llama vector fijo $\overrightarrow{AB}$.
– **Módulo** del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento *AB*. Se denota $\left|\overrightarrow{AB}\right|$
– **Dirección** de $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que contiene a *A* y a *B*.
– **Sentido** de $\overrightarrow{AB}$ es el que indica el traslado de *A* a *B*.
• Dos vectores fijos son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces el polígono de vértices *A*, *B*, *D* y *C* (en ese orden) es un paralelogramo.



Vector fijo de extremos *A* y *B*



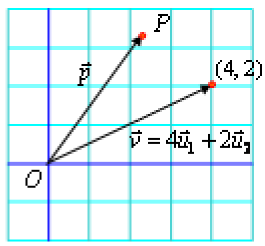
Vectores equipolentes



Vector libre $\vec{p}$. Es equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

• Se llama **vector libre** a un vector y a todos los que son equipolentes a él; esto es, todos los que se obtienen trasladándolo (paralelamente). Entre ellos tiene especial importancia el que parte del origen de coordenadas, en el punto *O*.

• **Correspondencia entre puntos y vectores**
Entre puntos de $\mathbf{R}^2$ (o de $\mathbf{R}^3$) y vectores libres del plano (o del espacio) existe una biyección:
A cada vector $\overrightarrow{AB}$, equipolente a $\overrightarrow{OP}$, se le asocia el punto *P*.
A cada punto *P* se le asocia el vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

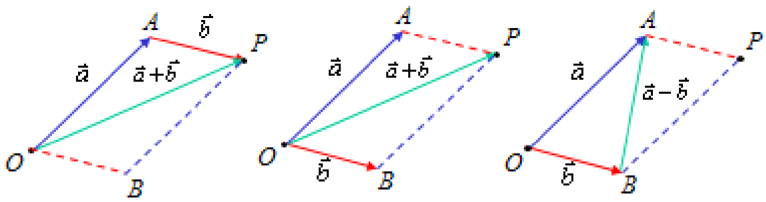


Se escribe, indistintamente, $P = (a_1, a_2)$ o $\vec{p} = (a_1, a_2)$; y $A = (a_1, a_2, a_3)$ o $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
→ El uso de la misma notación para designar puntos y vectores no debe confundir al lector. Habitualmente el contexto aclara su significado. Así, puede decirse “sea el punto (a_1, a_2, a_3)” o “sea el vector (a_1, a_2, a_3)”. También suele escribirse $A(a_1, a_2, a_3)$, sin el signo igual, para designar a los puntos.

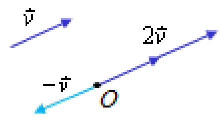
Ejemplo:
Al punto (4, 2) se le asocia el vector $\vec{v} = (4,\ 2)$. Más adelante se verá el significado de la notación $\vec{v} = 4\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.

1.3. Interpretación geométrica de las operaciones con vectores libres

Para sumar dos vectores se pone uno a continuación del otro (el origen del segundo en el extremos del primero). El vector suma tiene como origen el origen del primero, y como extremo el extremo del segundo. También puede aplicarse el esquema del paralelogramo, trasladando ambos vectores al origen.



Suma y resta de vectores



Multiplicación de un vector por un número

En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, para obtener las coordenadas de la suma o del producto se procede como se ha indicado antes. Esto es, si: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, entonces:

- $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.
- $\vec{a}-\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$.

<u>Observación:</u>

El vector $\overline{BA}=\vec{a}-\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)$; y $\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)$.

- $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$.

Si $\lambda > 0$, el vector $\lambda\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$; si $\lambda < 0$, sentido contrario.

Ejemplos:

Si $A(1, -2, 0)$ y $B(3, -1, 4)$, se tendrá:

$\vec{a}=(1, -2, 0)$; $\vec{b}=(3, -1, 4)$.

$\overline{BA}=\vec{a}-\vec{b}=(1, -2, 0)-(3, -1, 4)=(-2, -1, -4)$.

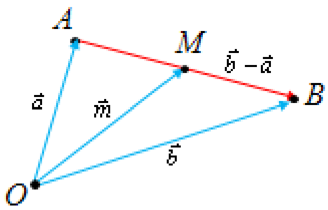
$\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(3, -1, 4)-(1, -2, 0)=(2, 1, 4)$.

$2\vec{a}=2(1, -2, 0)=(2, -4, 0)$; $-3\vec{a}=-3(1, -2, 0)=(-3, 6, 0)$.

- **Punto medio de un segmento**

Las coordenadas del punto medio, M, del segmento de extremos

$A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ son $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}, \dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$.



Como puede observarse:

$$\overline{OM}=\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{AB} \Rightarrow \vec{m}=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

Por tanto, M, tiene las coordenadas indicadas.

Ejemplo:

El punto medio del segmento de extremos $A(1, -2, 0)$ y $B(3, -1, 4)$ es:

$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2-1}{2}, \frac{0+4}{2}\right)=\left(2, -\frac{3}{2}, 2\right).$$

1.4. Dependencia e independencia lineal de vectores

- **Combinación lineal de vectores**

Si $\vec{a}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n$ son vectores de un espacio vectorial **E**, se dice que el vector $\vec{a}$ es combinación lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ cuando se puede escribir en función de ellos; esto es, cuando $\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$, donde a_i son números reales. También se dice que $\vec{a}$ **depende linealmente** de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$.

- Los vectores $\vec{a}$ y $k\vec{a}$ son dependientes uno del otro: tienen la misma dirección; son paralelos; sus coordenadas son proporcionales.
- Al conjunto de vectores que dependen linealmente de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ se le llama **variedad lineal** engendrada por ellos. Toda variedad lineal tiene estructura de espacio vectorial. Más en concreto, toda variedad lineal es un susbespacio vectorial del espacio vectorial de referencia.

Ejemplos:

a) Si $\vec{a} = (1, -2, 0)$ y $\vec{b} = (3, -1, 4)$, todos los vectores de la forma $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ son combinación lineal (o dependen linealmente) de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Entre ellos:

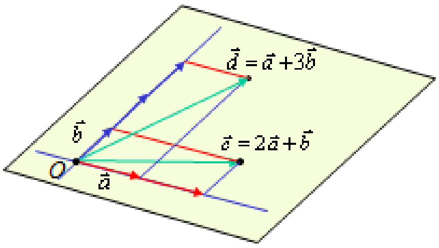
$\vec{c} = 2\vec{a} - 4\vec{b} = 2(1, -2, 0) - 4(3, -1, 4) = (-10, 0, -16)$.

b) El conjunto de vectores de la forma $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ es un susbespacio de $\mathbf{R}^3$. Estos vectores también se pueden escribir como $\vec{c} = \lambda(1, -2, 0) + \mu(3, -1, 4) = (\lambda + 3\mu, \quad -2\lambda - \mu, \quad 4\mu)$.

Dando valores a λ y μ se obtienen los vectores de ese subespacio. Por ejemplo, para $\lambda = -1$ y $\mu = 2$ se obtiene

$\vec{c} = (-1 + 3\cdot 2, \quad -2\cdot(-1) - 2, \quad 4\cdot 2) = (5, 0, 8)$.

(En este caso, los vectores pertenecen todos a un mismo plano).



c) El vector $\vec{e} = (5, 0, 0)$ no depende linealmente de $\vec{a} = (0, -2, 1)$ y $\vec{b} = (0, 2, 1)$, pues la primera coordenada, 5, no puede obtenerse a partir de dos ceros, que son la primera coordenada de cada uno de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{e}$ son linealmente independientes.

d) Podemos preguntarnos: ¿qué valor debe tomar α para que los vectores $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$ y $\vec{b} = (4, 2, -2)$ tengan la misma dirección?

Como debe cumplirse que $(2, 1, \alpha) = k \cdot (4, 2, -2) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$; luego $\alpha = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$.

- Si un vector no puede ponerse como combinación lineal de otros, se dice que es **linealmente independiente** de ellos.
- En general, un **conjunto de vectores** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ es **linealmente independiente** si la igualdad $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$ se cumple sólo cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Si la igualdad anterior se puede cumplir con algún $\lambda_i \neq 0$, los vectores son linealmente dependientes.

- El vector $\vec{0}$ de $\mathbf{R}^3$ es $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Este vector depende linealmente de cualquier conjunto de vectores, pues $\vec{0} = 0\cdot\vec{v}_1 + 0\cdot\vec{v}_2 + ... + 0\cdot\vec{v}_n$.

Ejemplos:
a) El conjunto de vectores {(1, 0, 1), (1, 3, 2), (0, −1, 1)} es linealmente independiente, pues la igualdad $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 3, 2) + \lambda_3(0, -1, 1) = (0, 0, 0)$ solo se cumple si $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$.
En efecto: $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 3, 2) + \lambda_3(0, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$
Igualando las componentes se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

b) Los vectores del plano $\vec{a} = (1, -2)$ y $\vec{b} = (-2, 4)$ son linealmente dependientes, pues $\vec{b} = -2\vec{a}$ y, por tanto: $2\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

c) El conjunto de vectores {(1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, −1, −1)} es linealmente dependiente, pues la relación $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, -1) = (0, 0, 0)$ se cumple sin necesidad de que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$.
En efecto: $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, -1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

que es un sistema con infinitas soluciones; por ejemplo: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -1$.
Puede verse también que (1, 0, 1) = (0, 1, 2) + (1, −1, −1).

- **Rango de un conjunto de vectores** es el número de ellos que son linealmente independientes. Para la determinación del rango puede recurrirse al álgebra de matrices, combinando las transformaciones de Gauss con el cálculo de determinantes.
En el ejemplo anterior, en el caso a), el rango es 3; en el caso b), el rango es 2.

- **Criterio para determinar la dependencia o independencia lineal** de tres vectores del espacio.
Aparte del método aplicado más arriba (el planteamiento y resolución de un sistema lineal), para comprobar si tres vectores del espacio son linealmente independientes, basta con resolver el determinante formado por los tres vectores. Si ese determinante vale cero, los vectores son linealmente dependientes; en caso contrario, serán linealmente independientes.

<u>Observación</u>: Dado que el sistema asociado es homogéneo (véanse los ejemplos anteriores), para que sea compatible determinado, el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3, lo que implica que su determinante debe ser distinto de cero. Esto significa que su solución es única: la trivial. En definitiva, que los vectores son linealmente independientes.

Ejemplos:
a) Los vectores (1, 0, 1), (1, 3, 2) y (0, −1, 1) son linealmente independientes, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 \neq 0 \rightarrow \text{Este conjunto de vectores tiene rango 3.}$$

b) Los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 2) y (1, −1, −1) son linealmente dependientes, pues

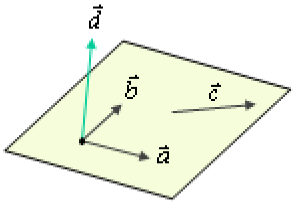
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+2-1=0 \to \text{Este conjunto de vectores tiene rango 2.}$$

<u>Observación:</u> Este mismo método puede aplicarse para vectores de dimensión dos, de dimensión 4, o de cualquier dimensión.

- **Interpretación geométrica de la dependencia lineal de vectores**.

– **En el plano:** dos vectores son linealmente dependientes cuando son paralelos; en caso contrario, serán linealmente independientes.
(Dados tres vectores del plano, siempre habrá uno que dependa de los otros dos.)

– **En el espacio**: dos vectores son linealmente dependientes cuando son paralelos; tres vectores son linealmente dependientes cuando están en el mismo plano (si son coplanarios). Tres vectores son linealmente independientes si están en planos distintos.
(Dados cuatro vectores del espacio, siempre habrá uno que dependa de los otros tres.)



1.5. Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial, **E**, es un conjunto de vectores, $\mathbf{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$, todos de **E**, que cumple dos condiciones:

1) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ son linealmente independientes; esto es, ninguno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás.

2) Cualquier vector de **E** depende linealmente del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$.

- **Bases de $\mathbf{R}^2$**

Dos vectores que sean linealmente independientes (no nulos y no alineados o paralelos) forman una base de $\mathbf{R}^2$. Pueden darse infinitas bases para $\mathbf{R}^2$.

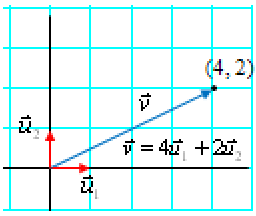
Si $\mathbf{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de $\mathbf{R}^2$, y $\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, a los números a_1 y a_2 se les llama **coordenadas** (o componentes) de $\vec{a}$ respecto de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Ejemplo:

Los vectores {(1, 2), (2, –2)} forman una base de $\mathbf{R}^2$, pues ni son nulos ni paralelos.
El vector $\vec{v} = \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(2, -2)$ tiene coordenadas (λ_1, λ_2) respecto de esa base.
Esta base no es operativa, no es clara, pues el vector que tiene, respecto de ella, por ejemplo las coordenadas (–4, 5) es $\vec{v} = -4(1, 2) + 5(2, -2) = (6, -18)$; pero decir que las coordenadas del vector (6, –18) son (–4, 5) es poco comprensible.

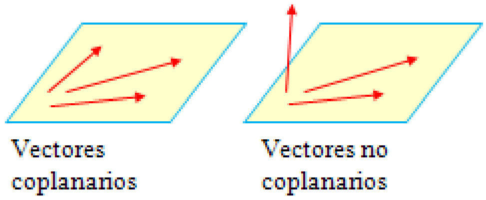
- La **base canónica**, la usual, de $\mathbf{R}^2$ es $\mathbf{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ = {(1, 0), (0, 1)}.

Esta base tiene la ventaja de que las coordenadas de un vector se obtienen directamente. Así, las coordenadas del vector $\vec{v} = (-4, 5)$ son –4 y 5, pues: $\vec{v} = -4(1, 0) + 5(0, 1)$. Del mismo modo, otro vector $\vec{v} = (4, 2)$ se puede escribir $\vec{v} = 4(1, 0) + 2(0, 1)$. Esto permite representar fácilmente un vector en el plano cartesiano.



- **Bases de $\mathbf{R}^3$**

Tres vectores que sean linealmente independientes (no nulos, no paralelos y no coplanarios) forman una base de $\mathbf{R}^3$.
Pueden darse infinitas bases para $\mathbf{R}^3$.
Si $\mathbf{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbf{R}^3$, y $\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$, a los números a_1, a_2 y a_3 se les llama coordenadas de $\vec{a}$ respecto de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.



Como se ha dicho anteriormente, para comprobar que tres vectores constituyen una base de $\mathbf{R}^3$ basta con calcular el determinante asociado y ver que es distinto de 0.

Ejemplo:

a) Los vectores (1, 0, 1), (0, 0, 2), (0, –1, 1), forman una base de $\mathbf{R}^3$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

El vector $\vec{v} = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 0, 2) + \lambda_3(0, -1, 1)$ tiene coordenadas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ respecto de esa base. Esta base no es operativa, pues el vector que tiene, respecto de ella, las coordenadas (3, –1, 5) es $\vec{v} = 3(1, 0, 1) - 1(0, 0, 2) + 5(0, -1, 1) = (3, -5, 6)$; pero decir que las coordenadas del vector (3, –5, 6) son (3, –1, 5) no es fácil de entender.

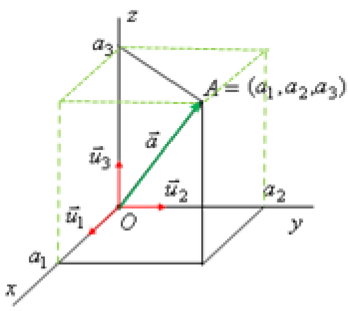
b) Para ver que los vectores $\vec{v}_1 = (2, 1, k)$, $\vec{v}_2 = (1, -2, 3)$ y $\vec{v}_3 = (-k, -1, 0)$ constituyan una base de $\mathbf{R}^3$ hay que exigir que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & -2 & 3 \\ -k & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -2k^2 - 4k + 6 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \neq 1$ y $k \neq -3$. Luego, los vectores dados forman una base siempre que $k \neq 1$ y -3.

- La **base canónica**, la usual, de $\mathbf{R}^3$ es $\mathbf{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Esta base es la que se utiliza por defecto, tiene la ventaja de que las coordenadas de un vector se obtienen directamente. Así, las coordenadas del vector $\vec{v} = (3, -1, 5)$ son 3, –1 y 5, pues:
  $\vec{v} = 3(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) = (3, -1, 5)$.

- **La referencia usual en $\mathbf{R}^3$**

Es $\{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, siendo O el origen de coordenadas y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ los vectores de la base canónica. Así, al punto $A(a_1, a_2, a_3)$ se le asocia el vector $\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$; o bien: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
Su representación gráfica se indica en la figura adjunta.
Los ejes de coordenadas suelen denotarse con las letras *x*, *y*, *z*; también suele hablarse de eje *OX*, eje *OY* y eje *OZ*.
Para el punto *A* dado, se tiene: $x = a_1$, $y = a_2$ y $z = a_3$.



2. Producto escalar de vectores

2.1. Definición

Dados dos vectores $\vec{v}=(a_1,b_1,c_1)$ y $\vec{w}=(a_2,b_2,c_2)$ se define:

- Producto escalar ordinario: $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\vec{v},\vec{w})$
- Producto escalar canónico: $\vec{v}\cdot\vec{w}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$

– Ambas definiciones son equivalentes, pero la segunda es más operativa siempre que los vectores vengan dados en función de la base canónica.
– Conviene observar que el producto escalar de dos vectores es un número real, que puede ser positivo, negativo o cero.
Observación: El producto escalar puede definirse, de manera análoga, para vectores de cualquier dimensión.

Ejemplo:
Si $\vec{v}=(2,-1,3)$ y $\vec{w}=(4,5,0)$, su producto escalar vale:
$\vec{v}\cdot\vec{w}=(2,-1,3)\cdot(4,5,0)=8-5+0=3$.

- **Algunas propiedades**:

1. Conmutativa: $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$
2. Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3. Para todo $\vec{v}$: $\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$
4. Si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow \vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares.

$\to$ La demostración de estas propiedades no es difícil. El lector debería intentar demostrarlas.

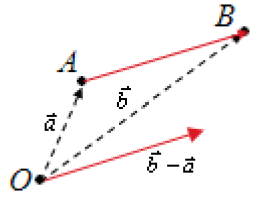
2.1. Aplicaciones del producto escalar

- El **módulo de un vector** $\vec{v}=(a_1,b_1,c_1)$, se define así:

$$|\vec{v}|=+\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$$

Ejemplo:
El módulo de los vectores $\vec{v}=(2,-1,3)$ y $\vec{w}=(4,5,0)$ es:

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}\,; \qquad |\vec{w}|=\sqrt{4^2+5^2+0^2}=\sqrt{41}$$



- **Distancia entre dos puntos**

La distancia entre dos puntos A y B, $d(A,B)$, es igual al módulo del vector que determinan: $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Si las coordenadas de esos puntos fuesen $A=(a_1,b_1,c_1)$ y $B=(a_2,b_2,c_2)$, entonces

$$\overrightarrow{AB}=(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1) \Rightarrow d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

Ejemplo:
Si $A(1,-2,0)$ y $B(3,-1,4)$, la distancia, $d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(-1-(-2))^2+(4-0)^2}=\sqrt{21}$
Es evidente que coincide con el módulo del vector

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(3,-1,4)-(1,-2,0)=(2,1,4) \to \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$$

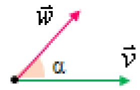
Obsérvese también que: $d(A,B)=d(B,A)=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{(1-3)^2+(-2-(-1))^2+(0-4)^2}=\sqrt{21}$.

- **Coseno del ángulo que forman dos vectores**

De la primera definición del producto escalar, se deduce que: $\cos(\vec{v},\ \vec{w}) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$

Teniendo en cuenta la definición del producto escalar canónico, y suponiendo que $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$), se tendrá:

$$\cos(\vec{v},\ \vec{w}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}}\cdot\sqrt{w_1^{\,2} + w_2^{\,2} + w_3^{\,2}}}$$

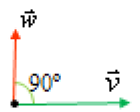


Ejemplo:
El coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{v} = (2, -1, 3)$ y $\vec{w} = (4, 5, 0)$ será:

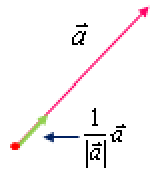
$$\cos(\vec{v},\ \vec{w}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{8-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{41}} = \frac{3}{\sqrt{574}} \Rightarrow \text{ángulo}(\vec{v},\ \vec{w}) = \arccos\frac{3}{\sqrt{574}} = 82{,}8^{\circ}.$$

- **Vectores ortogonales y vectores ortonormales**.

Dos vectores son ortogonales, perpendiculares, si su producto escalar vale cero.



Si dos vectores ortogonales tienen módulo 1, se llaman ortonormales.
Los vectores de módulo 1 se llaman **unitarios**. Para cualquier vector $\vec{a}$, el vector $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ es unitario.



Ejemplos:

a) Los vectores $\vec{a} = (1, -2, 5)$ y $\vec{b} = (3, -1, -1)$ son ortogonales, pues
$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1, -2, 5)\cdot(3, -1, -1) = 3 + 2 - 5 = 0$

b) Hay infinitos vectores perpendiculares a otro dado. Así, si $\vec{a} = (1, -2, 5)$, para que otro vector $\vec{b} = (x, y, z)$ sea perpendicular a él debe cumplirse que $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Esto es:
$(1, -2, 5)\cdot(x, y, z) = 0 \Rightarrow x - 2y + 5z = 0$.
Algunos de esos vectores, que pueden determinarse por tanteo, son:
$\vec{b}_1 = (5, 0, -1)$, $\vec{b}_2 = (1, 3, 1)$ o $\vec{b}_3 = (-3, 1, 1)$.

c) Podría plantearse el problema de encontrar el valor de k que hace que los vectores $\vec{v} = (-1, 2, k)$ y $\vec{w} = (2, k, -1)$ sean perpendiculares.
→ Debe cumplirse que $\vec{v}\cdot\vec{w} = (-1, 2, k)\cdot(2, k, -1) = 0 \Rightarrow -2 + 2k - k = 0 \Rightarrow k = 2$.

d) Dados los vectores $\vec{a} = (1, 0, 1)$ y $\vec{b} = (1, 1, -1)$, los vectores

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}\cdot(1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}}\cdot(1,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$

son unitarios y ortogonales; por tanto, son ortonormales.

e) La base canónica, $\mathbf{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}, es una base ortonormal, pues está formada por vectores unitarios, perpendiculares dos a dos.