Problemas y preguntas de tipo test

Integrales indefinidas

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4} dx$ b) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$ c) $\int \cos x \cdot (\sin x)^2 dx$ d) $\int x(4 - 4x^2)dx$

Solución:

a) Se escribe el integrando como se indica:

$$\int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4} dx = \int \left(\frac{2x}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} + \frac{3x^3}{x^4} \right) dx = \int \left(2x^{-3} - x^{-2} + \frac{3}{x} \right) dx = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3\ln x + c$$

b) $$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx = \int \left(x^{-1/4} - x^{-5/12} \right) dx = \frac{4}{3} x^{3/4} - \frac{12}{7} x^{7/12} + c$$

c) Ajustando constantes:

$$\int \cos x \cdot (\sin x)^2 dx = \frac{1}{3} \int 3(\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + c$$

d) $$\int x(4 - 4x^2)dx = \int (4x - 4x^3)dx = 2x^2 - x^4 + c$$

2. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx$ b) $\int x\sqrt{1 - x^2} dx$ c) $\int (\text{sen}\, x)^3 dx$ d) $\int (2 - 3x)^2 dx$

Solución:

a) Ajustando constantes:

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 2) + c$$

b) $\int x\sqrt{1 - x^2} dx$ puede hacerse directamente (es inmediata).

$$\int x\sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x(1 - x^2)^{1/2}) dx = -\frac{1}{2} \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3} (1 - x^2)^{3/2} + c$$

c) $$\int \text{sen}^3 x dx = \int \text{sen}\, x \cdot \text{sen}^2 x dx = \int \text{sen}\, x \cdot (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= \int \text{sen}\, x dx - \int \text{sen}\, x \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

d) Se opera en el integrando:

$$\int (2 - 3x)^2 dx = \int (4 - 12x + 9x^2) dx = 4x - 6x^2 + 3x^3 + c$$

3. a) Comprueba que $\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x^3+x}$.

b) Calcula la integral indefinida: $\int \frac{1}{x^3+x}dx$.

Solución:

a) $\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}-\frac{x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x^3+x}$.

b) Por lo visto:

$$\int \frac{1}{x^3+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3-1}{x+3}dx$ b) $\int 2x\ln x dx$

Solución:

a) Dividiendo el integrando (puede hacerse por Ruffini), se tiene:

$$\int \frac{x^3-1}{x+3}dx = \int\left(x^2-3x+9-\frac{28}{x+3}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-28\ln(x+3)+c$$

b) La integral $\int 2x\ln x dx$ se hace por partes.

Tomando:

$$u=\ln x \text{ y } dv=2xdx \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx;\ v=x^2$$

Luego,

$$\int 2x\ln x dx=x^2\ln x-\int x dx = x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+c$$

5. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \cos(4x+3)dx$ b) $\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}dx$

c) $\int \frac{e^{-2x}}{5}dx$ d) $\int \frac{dx}{x(4-\ln x)} \to$ (cambio: $t=\ln x$)

Solución:

a) $\int \cos(4x+3)dx = \frac{1}{4}\int 4\cos(4x+3)dx = \frac{1}{4}\sin(4x+3)+c$

b) Es una integral "inmediata". Basta con ajustar constantes.

$$\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(4+x^2\right)^{1/3}dx = \frac{1}{2}\frac{\left(4+x^2\right)^{1/3+1}}{1/3+1}+c = \frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^4}+c$$

c) $\int \frac{e^{-2x}}{5}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(-2)}\int(-2)e^{-2x}dx = -\frac{1}{10}e^{-2x}+c$

d) Si $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}dx$. Por tanto,

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln x)} = \int \frac{1}{(4-\ln x)}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{4-t}dt = -\ln(4-t)+c = -\ln(4-\ln x)+c$$

6. Halla la primitiva de $f(x) = x(1-\ln x)$ que pasa por el punto (1, 3).

Solución:

Hay que encontrar la función $F(x) = \int x(1-\ln x)dx$ que cumpla que $F(1) = 3$.

En primer lugar puede escribirse $\int x(1-\ln x)dx = \int xdx - \int x\ln xdx$.

En la segunda integral se hace

$u = x\ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1)dx$

$dv = dx \quad \Rightarrow v = x$

Luego, $\int x\ln xdx = x^2\ln x - \int(x\ln x + x)dx = x^2\ln x - \int x\ln xdx - \int xdx \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\int x\ln xdx = x^2\ln x - \dfrac{x^2}{2}$

De donde, $\int x\ln xdx = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{x^2}{4}$

Por tanto:

$$F(x) = \int x(1-\ln x)dx = \int xdx - \int x\ln xdx = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}\right) + c = -\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{3x^2}{4} + c.$$

Si se desea que $F(1) = 3 \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\ln 1 + \dfrac{3\cdot 1^2}{4} + c = 3 \Rightarrow c = 3 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4}$.

La primitiva buscada es $F(x) = -\dfrac{1}{2}x^2\ln x + \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{9}{4}$

7. Calcula la integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^2-4}$.

Solución:

Ambas pueden hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

a) $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$.

Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2$: $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, se tiene la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Luego:

$x + 8 = A(x+2) + B(x-1)$

si $x = 1$: $9 = 3A \Rightarrow A = 3$

si $x = -2$: $6 = -3B \Rightarrow B = -2$

Con esto:

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx = \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x+2}dx = 3L(x-1) - 2L(x+2) + c$$

b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$.

Como:

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = A(x+2)+B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = -\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\int \frac{2dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{1/2}{x-2} - \frac{1/2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x+2) + c$$

8. Halla la integral indefinida $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ mediante el cambio de variable $\sqrt{x} = t$.

Solución:

Si $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt$.

Por tanto,

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+t}2tdt = \int \frac{2t}{1+t}dt = \int \frac{2(1+t)-2}{1+t}dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2t - 2\ln(1+t) + c =$$

$$= \text{(deshaciendo el cambio)} = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + c$$

Integrales definidas

9. Halla el valor de:

a) $\int_2^3 \frac{9}{\sqrt{3x-5}}dx$ b) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$ c) $\int_0^1 xe^{-3x^2+1}dx$

Solución:

a) $\int_2^3 \frac{9}{\sqrt{3x-5}}dx = 6\sqrt{3x-5}\Big|_2^3 = 6(2-1) = 6$

b) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$

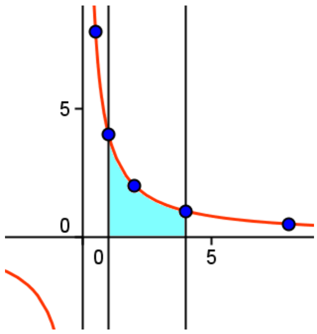
c) Ajustando constantes:

$$\int_0^1 xe^{-3x^2+1}dx = -\frac{1}{6}\int_0^1\left(-6xe^{-3x^2+1}\right)dx = \left(-\frac{1}{6}e^{-3x^2+1}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}\left(e^{-2}-e\right)$$

10. Calcula el área de la región limitada por $y=\frac{4}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = 4$.

Solución:

La función $y=\frac{4}{x}$, que es una hipérbola equilátera, puede trazarse dando algunos puntos: (0,5, 8); (1, 4); (2, 2); (4, 1); (8, 0,5).



La región es la sombreada en la gráfica adjunta.

El área viene dada por la integral definida:

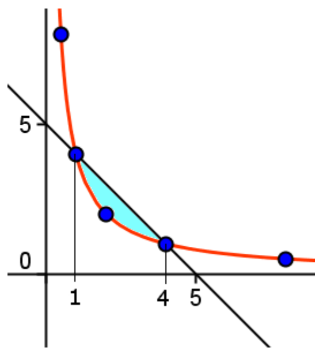
$$\int_1^4 \frac{4}{x}dx = [4\ln x]_1^4 = 4\ln 4$$

11. Calcula el área de la región limitada por la función $y=\frac{4}{x}$ y la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1).

Solución:

La recta que pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1) de la curva tiene por ecuación :

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-4}{1-4} \Leftrightarrow y=-x+5.$$



El recinto es el sombreado en la figura adjunta.

El área de esa región viene dada por la integral definida:

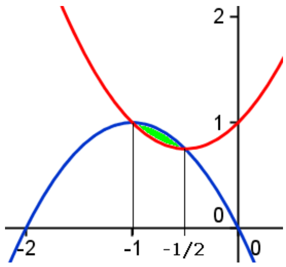
$$\int_1^4\left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx = \left[5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\right]_1^4 = \frac{15}{2}-4\ln 4$$

12. Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = x^2 + x + 1$, $y = -x^2 - 2x$.

Solución:

El área es la del recinto sombreado en la figura adjunta. (Como las gráficas son parábolas pueden trazarse fácilmente).

Las curvas se cortan en $x = -1$ y en $x = -1/2$, que son las soluciones del la ecuación: $x^2 + x + 1 = -x^2 - 2x$



Luego:

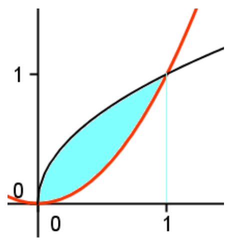
$$S = \int_{-1}^{-1/2} (-x^2 - 2x - (x^2 + x + 1))dx = \int_{-1}^{-1/2} (-2x^2 - 3x - 1)dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x \right)\Bigg|_{-1}^{-1/2} = \frac{1}{24}$$

13. Halla el área del recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solución:

El recinto plano comprendido entre las gráficas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, que puede trazarse dando algunos valores, es el adjunto.



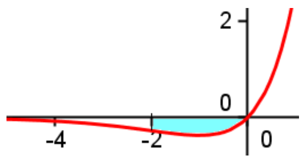
$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx = \left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

14. Halla la superficie del recinto plano encerrado entre la curva dada por la función $f(x) = xe^x$ y el eje *OX*, en el intervalo [–2, 0].

Solución:

En el intervalo considerado, el signo de la función es negativo, por tanto, la superficie buscada viene dada por:

$$S = -\int_{-2}^{0} xe^x dx$$



La integral $\int xe^x dx$ la haremos por partes.

Tomando:

$u = x$ y $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx$; $v = e^x$

Se tiene:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

Luego:

$$S = -\int_{-2}^{0} xe^x dx = -\left[xe^x - e^x \right]_{-2}^{0} = 1 - 3e^{-2}$$

(La gráfica no es imprescindible).

15. Calcula el área encerrada entre la curva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x}$ y el eje *OX*, en el intervalo [0, 2].

Solución:

Como en el intervalo de integración la función es positiva, el área pedida es:

$$A = \int_0^2 \frac{x^2}{2+x} dx = \int_0^2 \left(x - 2 + \frac{4}{2+x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(2+x) \right]_0^2 = -2 + 4\ln 4 - 4\ln 2 = 4\ln 2 - 2$$

16. Calcula el área encerrada entre las curvas dadas por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$.

Solución:

Para determinar el área interesa conocer los puntos de corte de las curvas y saber qué curva va por encima de la otra entre esos puntos de corte. También es conveniente hacer un esquema gráfico de la situación.

Puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x^3 - 2x^2 + 2x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

Las curvas se cortan cuando $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Posición de las curvas en los intervalos (0, 1) y (1, 2).

Se hace la diferencia $g(x) - f(x)$, que es $g(x) - f(x) = x(x-1)x-2)$.

Luego:

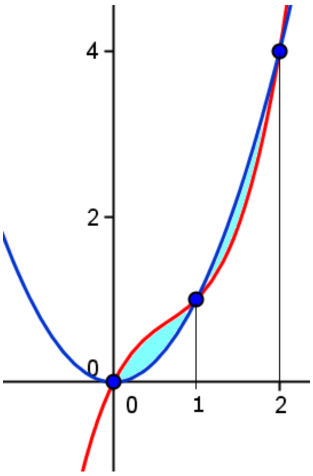
- Si $0 < x < 1$, $g(x) - f(x) = x(x-1)x-2) = (+)\cdot(-)\cdot(-) > 0 \to g(x)$ va por encima de $f(x)$
- Si $1 < x < 21$, $g(x) - f(x) = x(x-1)x-2) = (+)\cdot(+)\cdot(-) < 0 \to g(x)$ va por debajo de $f(x)$

Por tanto, el área pedida viene dada por

$$S = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx + \int_1^2 (f(x) - g(x))dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



El esquema gráfico, que puede obtenerse calculando y representando algunos puntos de las curvas, es el adjunto.

17. El área de la región plana limitada por la curva $y = (\sin x)^2 \cos x$ y el eje OX en el intervalo $[0, \pi/2]$ vale:

a) 1/3 b) 1 – π/4 c) Ninguna de las anteriores

Solución:

Como la función es positiva en el intervalo de estudio, la superficie buscada es:

$$S = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{3}$$

→ La respuesta es a).

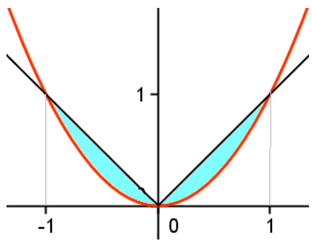
18. El área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$, vale:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Las curvas pueden representarse dando valores. Son las adjuntas.

Por tanto:



$$S = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

→La respuesta es b).

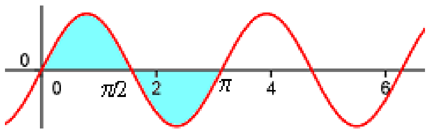
19. El área de la región plana limitada por la curva $y = \sin 2x$ y el eje OX en el intervalo [0, π] vale:

a) 0 b) 2π c) Ninguna de las anteriores

Solución:

La función corta en los puntos $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

Luego:



$$S = 2\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = 2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 2$$

20. El área encerrada entre la curva $y = \frac{1}{x}$ y el eje OX, entre $x = 1$ y $x = e^2$, vale:

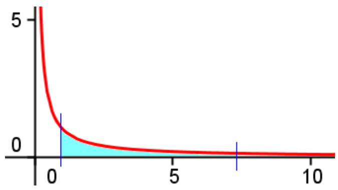
a) $e^2 - 1$ b) $4 - e$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

El recinto es el sombreado de la figura adjunta.

(No es necesario dibujarlo, pues la función es positiva en el intervalo de integración).

El área es:



$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2$$

La respuesta es c).

Integrales impropias

21. Halla:

a) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ b) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ c) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(4-x)^2}dx$ d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(3-x)^2}dx$

Solución:

a) Es impropia (no es continua en $x = 0$).

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_t^2 = \lim_{c\to 0^+}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{t}\right) = 2\sqrt{2}$$

b) Es impropia (no es continua en $x = 0$).

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^8 x^{-1/3}dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x^{2/3}\right)\Bigg|_t^8 = \lim_{t\to 0^+}\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{t^2}\right) = 6$$

c) $$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(4-x)^2}dx = \lim_{b\to -\infty}\int_b^0 \frac{1}{(4-x)^2}dx = \lim_{b\to -\infty}\left(\frac{1}{4-x}\right)\Bigg|_b^0 = \lim_{b\to -\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4-b}\right) = \frac{1}{4}$$

d) $$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(3-x)^2}dx = \lim_{b\to -\infty}\int_b^0 \frac{1}{(3-x)^2}dx = \lim_{b\to -\infty}\left(\frac{1}{3-x}\right)\Bigg|_b^0 = \lim_{b\to -\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3-b}\right) = \frac{1}{3}$$

22. La integral impropia $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$ es:

a) Convergente.
b) Divergente.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La discontinuidad se produce en $\pi/2$. Por tanto:

$$\int_0^{\pi/2} \tan x dx = \lim_{c\to(\pi/2)^-}\int_0^c \tan x dx = \lim_{c\to(\pi/2)^-}\int_0^c \frac{\sin x}{\cos x}dx =$$

$$= \lim_{c\to\pi/2^-}(-\ln(\cos x))\Big|_{-8}^{c} = \lim_{c\to\pi/2^-}(-\ln\cos c+\ln\cos 0) = \left[-\ln 0+\ln 1\right] = +\infty$$

→La respuesta es b).

23. La integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$:

a) Converge a 1.
b) Converge a 1/2.
c) Es divergente.

Solución:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_2^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

→La respuesta es b).

24. La integral impropia $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$

a) Converge a 1/2.
b) Es divergente.
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:

La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es discontinua en $x = 0$, luego:

$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^2} dx$; las dos integrales del segundo miembro son divergentes.

- La primera es: $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_{-1}^{t} = \lim_{t \to 0^-} \left(\frac{-1}{t} + 1 \right) = +\infty$

→La respuesta es b).

25. La integral impropia $\int_{1}^{+\infty} x^{-1-a} dx$, donde $a > 0$:

a) Converge siempre.
b) Diverge siempre.
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-1-a} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} x^{-1-a} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^{-a}}{-a} \right]_{1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{ab^a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a}$$

→La respuesta es a).

26. La integral impropia $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$:

a) Converge a 2.
b) Converge a $2\sqrt{2}$
c) Es divergente
Solución:

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to 0^+} \int_{t}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to 0^+} \left(2\sqrt{x} \right) \Big|_{t}^{2} = \lim_{t \to 0^+} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{t} \right) = 2\sqrt{2}$$

→La respuesta es b).

27. El área del recinto limitado por los ejes de coordenadas y la curva $y = e^{-x}$ viene dada por $\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx$. Su valor es:

a) 1 b) e^{-1}
c) No es convergente: vale ∞.
Solución:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{t} e^{-x} dx = \lim_{t \to +\infty} (-e^{-x}) \Big|_{0}^{t} = \lim_{t \to +\infty} (-e^{-t} + e^{0}) = 1$$

→La respuesta es a).

28. El valor de $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ es:

a) +1 b) ∞

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left((-be^{-b} - e^{-b}) + 1\right) = 1$$

La integral definida se hace como sigue.

Tomando:

$u = x$ y $dv = e^{-x}dx \Rightarrow du = dx$; $v = -e^{-x}$

Luego:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

$\rightarrow$La respuesta es a).

29. La integral $\int_1^{\infty} e^{-2x}dx$:

a) Converge a e^2.

b) Converge a e^{-2}.

c) Es divergente

Solución:

$$\int_1^{\infty} e^{-2x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-2x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-2x}\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-2t} - (-e^{-21})\right) = e^{-2}$$

$\rightarrow$La respuesta es b).

30. La integral impropia $\int_1^{+\infty} x^{p-2}dx$, converge si:

a) $p > 1$ b) $0 < p < 2$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\int_1^{+\infty} x^{p-2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{p-2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{p-1}}{p-1}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right)$$

Este límite existe cuando $0 < p < 1$. (Si $p > 1$, $b^{p-1} \to \infty$).

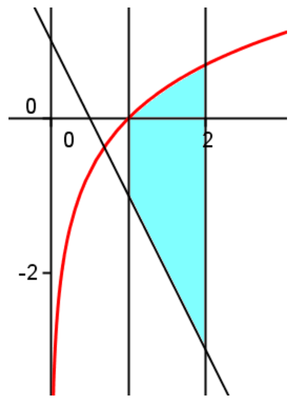
$\rightarrow$La respuesta es c).

Matemáticas Empresariales I

Las integrales que siguen se han propuesto en exámenes de licenciatura (Hoja 6.2)

1. (E11) Dadas las funciones $f(x)=\ln(x)$ y $g(x)=1-2x$, halla el área del recinto plano limitado por las rectas $x = 1$, $x = 2$ y las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:
El recinto determinado por las funciones dadas es el sombreado en la figura adjunta. (Tanto la función logarítmica como la recta son de representación inmediata.)



El área viene dada por la integral:

$$\int_1^2 (\ln x-(1-2x))dx == \int_1^2 \ln x dx - \int_1^2 (1-2x)dx =$$

$$= \left(x\ln x - 2x + x^2\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 + 1$$

La primitiva $f(x)=\ln(x)$ se encuentra por partes, haciendo:

$$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=dx \Rightarrow v=x$$

De donde: $\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$

La primitiva $g(x)=1-2x$ es inmediata: $\int (1-2x)dx = x-x^2$.

2. (E10) El valor de $\int_1^a \frac{8}{x^3}dx=3$:

a) Si $a = 2$ b) Si $a = -2$ c) Para ambos valores de a; esto es, si $a = \pm 2$

Solución:
Una primitiva del integrando es inmediata. Basta con escribir:

$$\int \frac{8}{x^3}dx = \int 8x^{-3}dx = 8\cdot\frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-4}{x^2}$$

Por tanto;

$$\int_1^a \frac{8}{x^3}dx=3 \Leftrightarrow \left(\frac{-4}{x^2}\right)\Big|_1^a = -\frac{4}{a^2}-\left(-\frac{4}{1}\right)=3 \Rightarrow -\frac{4}{a^2}+4=3 \Rightarrow a=2.$$

La respuesta es a).

Otra solución puede ser $a = -2$, aunque hay que descartarla, ya que la función $f(x)=\frac{8}{x^3}$ no es continua en el intervalo $[-2, 1]$. (Resultaría una integral impropia.)

3. (S09) El área del recinto limitado por $f(x)=\frac{x^2}{4}+1$ y el eje OX en el intervalo $[0, p]$, vale $\frac{8}{3}$ si:

a) $p = 1$ b) $p = 2$ c) Ninguna de las anteriores

Solución:

La función es positiva que en el intervalo de integración. Por tanto, el área buscada vale:

$$\int_0^p \left(\frac{x^2}{4}+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{12}+x\right)\Bigg|_0^p = \frac{p^3}{12}+p \to \frac{p^3}{12}+p=\frac{8}{3} \Rightarrow p^3+12p-32=0 \Rightarrow p=2$$

La respuesta es b).

4. (F09) El área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2+3$, vale:

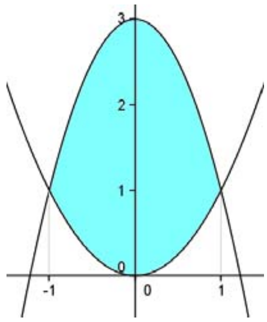
a) $\frac{27}{4}$ b) 4 c) Ninguna de las anteriores, su valor es: ______

Solución:

La región es la sombreada en la siguiente figura.

Las curvas se cortan en los puntos (–1, 1) y (1, 1), que son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2+3 \end{cases}$$



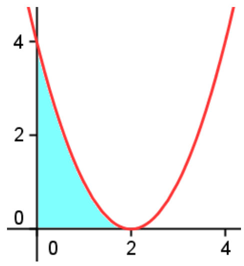
Como $y = x^2$ va por debajo de $y = -2x^2+3$ en el intervalo (–1, 1), el área viene dada por:

$$A = \int_{-1}^{1}(-2x^2+3-x^2)dx = \int_{-1}^{1}(-3x^2+3)dx = \left(-x^3+3x\right)\Big|_{-1}^{1} = 2-(-2) = 4$$

La respuesta es b).

5. (S08) La superficie finita comprendida ente la gráfica de $f(x) = x^2-4x+4$ y los ejes de coordenadas vale:

a) 4/3 u^2 b) 8/3 u^2 c) 16/3 u^2



Solución:

Hay que trazar la curva para comprobar que la función no corta al eje en el intervalo de integración. (También podría indicarse que $f(x) = x^2-4x+4 = (x-2)^2$ nunca es negativa). Por tanto:

$$S = \int_0^2 (x^2-4x+4)dx = \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}\ \text{u}^2$$

La respuesta es b).

6. F08. Haz un esbozo de la función $f(x) = x^3-6x^2+9x$ y calcula el área encerrada entre la curva de $f(x)$ y el eje OX.

Solución:

$f(x) = x^3-6x^2+9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2-12x+9 = 0 \Rightarrow x = 1; x = 3.$

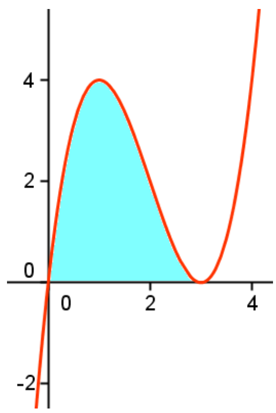
Si x < 1, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Si 1 < x < 3, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece $\Rightarrow$ En x = 1 hay máximo.

Si x > 3, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece $\Rightarrow$ En x = 3 hay mínimo.

Algunos valores: (–1, –1), (0, 0), (1, 4), (3, 0), (4, 4)

El esbozo es el siguiente.



La función corta al eje en los puntos $x = 0$ y $x = 3$; por tanto, el área pedida vale

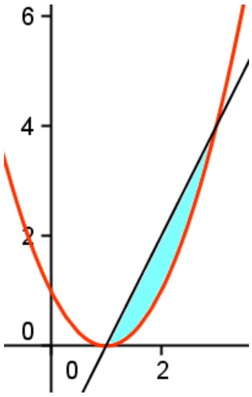
$$S=\int_0^3 (x^3-6x^2+9x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

7. (F07) La curva $y=x^2-2x+1$ y la recta de ecuación $y=2x-2$ limitan un recinto finito en el plano cuya área es:

a) 4/3 b) 7/3 c) Ninguna de las anteriores, su valor es ____

Solución:

Como tanto la parábola como la recta pueden dibujarse dando valores, el esquema gráfico no presenta dificultades. Se obtiene la figura adjunta; el recinto es el coloreado.



El área viene dada por:

$$\int_1^3 (2x-2-(x^2-2x+1))dx=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_1^3 = 0-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$$

La respuesta es a).

8. (S07) La curva $y=x^2-2x+1$ y la recta que pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(3,4)$ limitan un recinto finito en el plano, cuya área vale:

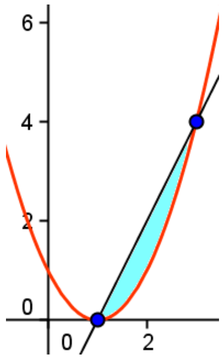
a) 2 unidades cuadradas (u^2) b) 5/3 u^2 c) 4/3 u^2.

Solución:

La recta que pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(3,4)$ es:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{4-0}\Leftrightarrow y=2x-2$$

Como tanto la parábola como la recta puede dibujarse dando valores, el esquema gráfico no presenta dificultades. Se obtiene la figura siguiente; el recinto es el coloreado.



El área viene dada por:

$$\int_1^3 (2x-2-(x^2-2x+1))dx=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_1^3$$

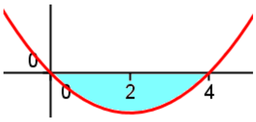
$$=0-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$$

La respuesta es c).

10. (F06) El área del recinto plano encerrado entre la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, y el eje *OX*, vale:
a) 2/5 b) 8/3 c) Ninguna de las anteriores, el área vale _____

Solución:
El área encerrada curvas es la sombreada.

$$A = -\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right)dx = \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{64}{12} + 8 = \frac{8}{3} \text{ u}^2$$

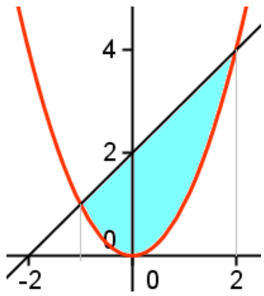


La respuesta es b).

11. (F05) El área encerrada entre las gráficas de la recta $y = x + 2$ y la parábola $y = x^2$, vale:
a) $\frac{7}{4}$ u^2 b) $\frac{11}{4}$ u^2 c) Ninguna de las anteriores, su valor es: ____

Solución:
El área encerrada entre ambas curvas es la sombreada en la siguiente figura.
La parábola y la recta se cortan en los puntos las soluciones del sistema $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$, que son (−1, 1) y (2, 4); puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 2$.
Por tanto, el área pedida viene dada por la integral

$$\int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2} \text{ u}^2$$



La respuesta es c).