PREGUNTAS DE TIPO TEST
DERIVADAS Y APLICACIONES

Derivabilidad

S09. La función $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+b & \text{si } x\le 2\\ a(x-3)^2+3 & \text{si } x>2\end{cases}$ es continua y derivable en $x = 2$:

a) Si $a = -1$ y $b = 3$
b) Si $a = 1$ y $b = 5$
c) Nunca puede ser derivable.

Solución:

- Para que sea continua deben coincidir los límites laterales con su valor de definición en dicho punto $x = 2$.

Si $x \to 2^-$, $f(x)=-(x-1)^2+b \to -1+b$

Si $x \to 2^+$, $f(x)=a(x-3)^2+3 \to a+3$

Por tanto, la función será continua en x = 2 cuando $-1 + b = a + 3$.

- Para que sea derivable deben coincidir las derivadas laterales en x = 2.

Salvo en x = 2, $f'(x)=\begin{cases}-2(x-1) & \text{si } x<2\\ 2a(x-3) & \text{si } x>2\end{cases}$

Veamos qué pasa en x = 2.

Si $x \to 2^-$, $f'(x)=-2(x-1) \to -2$

Si $x \to 2^+$, $f'(x)=2a(x-3) \to -2a \Rightarrow -2=-2a$

Por tanto, la función es derivable cuando $\begin{cases}-2a=-2\\ -1+b=a+3\end{cases} \Rightarrow a=1;\ b=5$

La función continua y derivable es: $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+5 & \text{si } x\le 2\\ (x-3)^2+3 & \text{si } x>2\end{cases}$

$\to$ La respuesta es b).

F09. La función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+(bx)^2, & x<0\\ b+\sqrt{x+1}, & 0\le x\end{cases}$ es:

a) Continua y derivable si $b = \pm 1$
a) Derivable sólo si $b = 1$
b) Continua sólo si $b = -1$

Solución:

<u>Continuidad en $x = 0$</u>. (Para que sea continua es necesario que los límites laterales sean iguales.)

Por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}x+(bx)^2\right)=0$

Por la derecha: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(b+\sqrt{x+1}\right)=b+1 \Rightarrow b=-1$

<u>Derivabilidad en $x = 0$</u>.

Salvo en $x = 0$, la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + 2b^2x, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}, & 0 < x \end{cases}$$

Derivada por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}x + 2b^2x\right) = \dfrac{1}{2}$

Derivada por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ No depende del valor de b.

Luego, la función continua (y derivable) es $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + x^2, & x < 0 \\ -1 + \sqrt{x+1}, & 0 \le x \end{cases}$.

$\to$ La respuesta es c).

F09. La derivada de $g(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x = -\dfrac{1}{2}$ vale:

a) $-\dfrac{2}{81}$ b) $\dfrac{24}{7}$ c) $\dfrac{40}{27}$

Solución:

$$g(x) = \frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x+1}(x-1)^2 - e^{2x+1}2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow \text{(simplificando)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x+1}(x-1) - e^{2x+1}2}{(x-1)^3} = \frac{2(x-2)e^{2x+1}}{(x-1)^3} \Rightarrow g'(-1/2) = \frac{2\left(-\frac{1}{2}-2\right)e^0}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3} = \frac{-5}{-\frac{27}{8}} = \frac{40}{27}$$

$\to$ La respuesta es c).

S08. La función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable si:

a) $a = 1$ b) $a = 2$ c) $a = -1$

Solución:

Continua: Si $x \to 1^-$, $f \to 3 - a$ Si $x \to 1^+$, $f \to 2/a \Rightarrow a = 1$ o $a = 2$.

Derivable: $f'(x) = \begin{cases} 3 - 2ax & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-2}{ax^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Si $x \to 1^-$, $f' \to -2a$ Si $x \to 1^+$, $f' \to -2/a \Rightarrow a = 1$

$\to$ La respuesta es a).

J08. La función $f(x)=\begin{cases}5+2sen(ax) & \text{si } x\le 0\\ ax^2+bx+b & \text{si } x>0\end{cases}$ verifica:

a) Es continua en $x = 0$ cuando $a = 5/2$.
b) Es derivable en $x = 0$ cuando $b=2a=5$.
c) En $x = 0$ nunca puede ser derivable.

Solución:
Continuidad en $x = 0$:
Si $x\to 0^-$, $f(x)\to 5$ Si $x\to 0^+$, $f(x)\to b \Rightarrow b = 5$.
Por tanto, $f(x)=\begin{cases}5+2sen(ax) & \text{si } x\le 0\\ ax^2+5x+5 & \text{si } x>0\end{cases}$.

Derivabilidad:
Salvo en $x = 0$, $f'(x)=\begin{cases}2a\cos(ax) & \text{si } x<0\\ 2ax+5 & \text{si } x>0\end{cases}$

Si $x\to 0^-$, $f'(x)\to 2a$ Si $x\to 0^+$, $f'(x)\to 5 \Rightarrow 2a=5\Rightarrow a=\dfrac{5}{2}$.

$\to$ La respuesta es b).

S07. La función $f(x)=\begin{cases}x^2-a & x<1\\ bx^2+4x-1 & x\ge 1\end{cases}$ es derivable en x = 1:

a) Si $a = b$ b) Si $a = 1$ y $b = -1$
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. Si $x\to 1^-$, $f(x)\to 1-a$. Si $x\to 1^+$, $f(x)\to b+3 \Rightarrow 1-a=b+3$
Salvo en x = 1, $f'(x)=\begin{cases}2x & x<1\\ 2bx+4 & x>1\end{cases}$
Si $x\to 1^-$, $f'(x)\to 2$, y si $x\to 1^+$, $f'(x)\to 2b+4 \Rightarrow 2=2b+4 \Rightarrow b=-1$ y $a=-1$
$\to$ La respuesta es c).

F07. La función $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & si & x\le 0\\ ax+b & si & x>0\end{cases}$ es derivable en el punto $x = 0$ cuando:

a) $a = b = 1$ b) $a = 2$ y $b = -1$ c) $a = 2$ y $b = 0$

Solución:
Para continua:
Si $x\to 0^-$, $f(x)=x^2+2x\to 0$ Si $x\to 0^+$, $f(x)=ax+b\to b \Rightarrow b=0$

Derivable:
$$f'(x)=\begin{cases}2x+2 & si & x<0\\ a & si & x>0\end{cases}$$
Si $x\to 0^-$, $f'(x)=2x+2\to 2$
Si $x\to 0^+$, $f'(x)=a\to a \Rightarrow a=2$.
$\to$ La respuesta es c).

Recta tangente a una curva

S09. La ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \frac{x^3}{x^2+1}$, el punto de abscisa $x = 1$, es:

a) $y = x - \frac{1}{2}$

b) $y = \frac{7}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$

c) Ninguna de las anteriores, la ecuación de dicha recta es: __________

Solución:

La ecuación de la tangente será $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, donde $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

$$f(1) = \frac{1}{2};\ f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} \to f'(1) = 1$$

Por tanto, la tangente es:

$$y - \frac{1}{2} = x - 1 \Leftrightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

F09. La curva de ecuación $y = 3x^2 - 1$ y la recta $y = 4x + b$ son tangentes en el punto $x = \frac{2}{3}$:

a) Para cualquier valor de *b*.

b) Sólo si $b = -\frac{7}{3}$

c) No pueden ser tangentes para ningún valor de *b*.

Sol:

En el punto de tangencia la derivada debe valer 4, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

$$y' = 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Para $x = \frac{2}{3}$, $y = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$. El punto de tangencia es $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Como ese punto debe cumplir la ecuación de la recta $y = 4x + b$:

$$\frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{2}{3} + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

S08. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa x = 1 es:

a) $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$ c) $y = 2\boldsymbol{x}$

Sol.

$$y = \frac{2}{x+3} \Rightarrow y = \frac{-2}{(x+3)^2} \to \text{y(1) = 1/2; y}'(1) = -1/8 \Rightarrow \text{tangente: } y = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$$

J08. La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$ es:

a) $y - 2 = 2(x - 2)$

b) $y = \frac{1}{2}x + 2$

c) Ninguna de las anteriores, dicha ecuación es: ____________

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ viene dada por la expresión: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

En este caso: $f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow f(2) = 2$; $f'(x) = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -1$.

Por tanto, la recta tangente es: $y - 2 = -(x - 2) \Rightarrow y = -x + 4$

S07. La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ en su punto de inflexión es:

a) $y = -6x + 1$

b) $y = -x + 6$

c) $y = -6x + 6$

Solución: $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4 \to f'(x) = 6x^2 - 12x \to f''(x) = 12x - 12 \Rightarrow$ PI = (1, 0)

Tangente: $y = -6(x - 1) \Rightarrow y = -6x + 6$.

F07. La ecuación de la tangente a la curva $f(x) = \frac{6x}{4x^2 + 1}$ en el punto x = 1 es:

a) $y = -\frac{18}{25}x + \frac{48}{25}$ b) $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f(x) = \frac{6x}{4x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{6(1 - 4x^2)}{(4x^2 + 1)^2} \to$ ($f(1) = 6/5$; $f'(1) = -18/25$)

La tangente es: $y - \frac{6}{5} = -\frac{18}{25}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{18}{25}x + \frac{48}{25}$

Máximos, mínimos e inflexión

S09. La función $f(x) = x^3 + px$ tiene, en algún $x < 0$:

a) Un mínimo si $p < 0$
b) Un máximo si $p > 0$
c) Ninguna de las anteriores.

Solución: Puntos singulares: $f'(x) = 3x^2 + p = 0 \to$ si $p < 0$ puede haber máximos o mínimos. (Se descarta b)

$\Rightarrow$ $f''(x) = 6x < 0$ $\to$ en algún $x < 0$ hay máximo.

$\to$en algún $x > 0$ hay mínimo.

S09. La función $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ tiene un punto de inflexión en (1, 1), siendo, además, decreciente en ese punto, si:

a) $a = b = 3$ b) $a = 1$ y $b = 2$ c) $a = 1$ y $b = 0$

Sol.

$p'(x) = 3ax^2 - 6x + b \Rightarrow p''(x) = 6ax - 6$

Para que (1, 1) sea punto de inflexión debe cumplirse que $p(1) = 1$ y que $p''(1) = 0$.

De $p''(1) = 0 \Rightarrow 6a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1$.

Para que $p(1) = 1 \Rightarrow a - 3 + b + 1 = 1 \Rightarrow b = 2$.

Por tanto: $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

Como $p'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, se tiene que $p'(1) = -1$; luego la función es decreciente en el punto (1, 1).

S09. La función $f(x) = e^{px + x^2}$ tiene un mínimo local en $x = 1$:

a) Cualquiera que sea el valor de p.
b) Si $p = -2$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f'(x) = (p + 2x)e^{px+x^2} \to p + 2x = 0 \Rightarrow x = -p/2$ es punto singular.

Para que $x = 1 \Rightarrow p = -2$

$f''(x) = \left(2 + (p + 2x)^2\right)e^{px+x^2} \to f''(0) > 0$, para cualquier valor de p: pero $p = -2$.

F09. La función $f(x) = \dfrac{3x^2 - ax}{x + 2}$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$:

a) Cuando $a = 18$
b) Cuando $a = 10$
c) En $x = 2$ no puede tener un mínimo relativo.

Solución:

Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$ debe cumplirse que: $f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$

$$f'(x) = \frac{(6x - a)(x + 2) - (3x^2 - ax)}{(x + 2)^2} = \frac{3x^2 + 12x - 2a}{(x + 2)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{12 + 24 - 2a}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$$

Veamos que, para ese valor de $a = 18$, $f''(2) > 0$:

$$f''(x) = \frac{96}{(x + 2)^3} \to f''(2) = \frac{96}{64} > 0$$

S08. La función $f(x) = e^{-x} + px - 1$ tiene:

a) Un mínimo si $p > 1$

b) Un punto de inflexión si $p = -1$

c) Ninguna de las anteriores

Solución:

$f'(x) = -e^{-x} + p = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x} = p \;\Rightarrow\;$ x = – ln p (posible máximo o mínimo)

$f''(x) = e^{-x} \;\rightarrow\; f''(-\ln p) = p$, que es > 0 si p > 1 $\Rightarrow$ Hay mínimo.

J08. La función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$ tiene:

a) Un máximo en x = 2.

b) Un punto de inflexión en x = 2.

c) Un punto de inflexión en x = –1.

Solución:

$f(x) = (x+3)(x-2)^4 \;\Rightarrow\; f'(x) = (x-2)^4 + 4(x+3)(x-2)^3 = 5(x-2)^3(x+2)$

$\Rightarrow\; f''(x) = 15(x-2)^2(x+2) + 5(x-2)^3 = 20(x-2)^2(x+1) \;\rightarrow$ c)

S07. La función $f(x) = e^{-2x^2} + px^2$ tiene, en $x = 0$:

a) Un máximo si $p < 2$

b) Un punto de inflexión si $p > 2$

c) Ninguna de las anteriores

Solución:

$f'(x) = -4xe^{-2x^2} + 2px = -2x(2e^{-2x^2} - p) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ (posible máximo o mínimo)

$f''(x) = -4e^{-2x^2} + 8x^2e^{-2x^2} + 2p \;\Rightarrow\; f''(0) = -4 + 2p < 0$ si $p < 2 \;\Rightarrow$ Hay máximo.

S07. La función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ tiene:

a) Un máximo y un mínimo

b) Sólo un máximo

c) Sólo un mínimo.

Solución:

La derivada es: $f'(x) = \dfrac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(1-x^2)}{e^{2x}}$, que se anula en x = ±1.

- Si x < –1, $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ decrece.
- Si –1 < x < 1, $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ crece. Por tanto en x = –1 hay un mínimo relativo.
- Si x > 1, $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ decrece. Por tanto, en x = 1 hay un máximo relativo.

Diferencial

F09. Teniendo en cuenta que $\sqrt{64} = 8$, utilizando la diferencial se obtiene que el valor de $\sqrt{65}$ es:

a) 8,0823 b) 8,0625 c) 8,06225

Sol.

Se toma $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Mediante la diferencial: $df(x) = f'(x)dx \Rightarrow df(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

Para $x = 64$ y $dx = 1$ se tiene: $df(64) = \dfrac{1}{2\sqrt{64}} \cdot 1 = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625$.

Por tanto, $f(65) \approx f(64) + df(64) = 8 + 0{,}0625 = 8{,}0625$

Mediante la tangente en $x = 64$, que es $y - f(64) = f'(64)(x-64) \Rightarrow y - 8 = \dfrac{1}{2\sqrt{64}}(x-64)$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{16}x + 4$.

Para $x = 65$, $f(65) \approx \dfrac{1}{16} \cdot 65 + 4 = 8{,}0625$

Taylor

F09. El polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sin x + \cos 2x$, en $x = 0$, es:

a) $P(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

b) $P(x) = 1 + x - 2x^2 - \frac{1}{6}x^3$

c) $P(x) = 1 - 2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3$

Sol.

$f(x) = \sin x + \cos 2x \;\longrightarrow\; f(0) = 1$

$f'(x) = \cos x - 2\sin 2x \;\longrightarrow\; f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x - 4\cos 2x \;\longrightarrow\; f''(0) = -4$

$f''(x) = -\cos x + 8\sin 2x \;\longrightarrow\; f'''(0) = -1$

Por tanto, $P(x) = 1 + x - \frac{4}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 = 1 + x - 2x^2 - \frac{1}{6}x^3$

J08. El polinomio de Taylor de 4º grado de la función $f(x) = x\ln(1+x)$ en el punto $x = 0$ es:

a) $P(x) = (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \frac{(x+1)^4}{4!}$

b) $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

c) $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$

Solución:

$$f(x) = x\ln(1+x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \;\Rightarrow\; f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f'''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \;\Rightarrow\;\Rightarrow\; f^{(4}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{6}{(1+x)^8}$$

Luego: $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = 2$; $f'''(0) = -3$; $f^{(4}(x) = 8$

Por tanto, $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$

J08. Usando el polinomio de Taylor de grado dos de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ se puede estimar que:

a) $\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} = 1{,}095$

b) $\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{250} = 1{,}096$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Calculamos el polinomio de Taylor de grado 2 $f(x)=\sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \Rightarrow$

$f''(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} \Rightarrow$

Luego: $f(0)=1$; $f'(0)=\frac{1}{2}$; $f''(0)=-\frac{1}{4}$;

Por tanto, $P(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^2$

Para x = 0,2 = 1/5, se tiene $f(0{,}2)=\sqrt{0{,}2+1}=\sqrt{1{,}2}\approx P(0{,}2)=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2$

Otras aplicaciones de la derivada

S09. La función $f(x) = \ln x - x^2$ cumple:
a) Corta dos veces al eje *OX*.
b) Tiene un mínimo relativo en algún punto mayor que 0.
c) No corta al eje *OX*.

Solución:
La función está definida para $x > 0$.
Derivando: $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x \Rightarrow$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x = 0$ si $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 2 < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Como $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2} = -\ln\sqrt{2} - 0{,}5 < 0$, esto es, el máximo es menor que 0, la función nunca corta al eje *OX*.

F09. El valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - ax + 3$, en el intervalo (1, 4), es:

a) $\dfrac{3a}{2}$ b) $\dfrac{5}{2a}$ c) $\dfrac{5}{2}$

Solución:
$$\frac{f(4) - f(1)}{4-1} = f'(x),\ x \in (1, 4) \Leftrightarrow \frac{19 - 4a - (4-a)}{3} = 2x - a \Rightarrow \frac{15 - 3a}{3} = 2x - a \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

S08. El número real *c* que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en el intervalo $(a, 2a)$, con $a \neq 0$, es:

b) $c = \dfrac{3a}{2}$ **b)** $c = a\sqrt{2}$ c) Ninguna de las anteriores

Sol. Es obvio que la función es continua y derivable en el intervalo dado.
$$\frac{f(2a) - f(a)}{2a - a} = f'(c) \Rightarrow \frac{1/2a - 1/a}{a} = \frac{-1}{c^2} \Rightarrow c = a\sqrt{2}$$

J08. El $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x \ln x)$ vale:

a) 0 b) -1 c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{senx}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-sen^2 x}{x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2senx\cos x}{\cos x - xsenx} = \frac{0}{1} = 0$$

J08. La discontinuidad, en el punto $x = 0$, de la función $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$ puede evitarse definiendo:

a) $f(0) = 1/4$ b) $f(0) = 3/2$

c) Dicha discontinuidad no puede evitarse.

Solución:

La discontinuidad se evita definiendo $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Luego $f(0) = 3/2$

S07. El valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$ es:

a) No existe: $+\infty$.

b) Existe sólo por la derecha: si $x \to 0^+$

c) -2.

Solución:

Lo haremos aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-2sen(2x)}{\cos(2x)}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2tag(2x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= (L'H) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2(1 + tag^2(2x)) \cdot 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

S07. La función $f(x) = x^4 - 8x^2 + p$, con $p > 16$, tiene un máximo en $x = 0$ y corta al eje OX:

a) Cuatro veces

b) Exactamente dos veces

c) Ninguna vez.

Solución:

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$ x = 0; x = –2; x = 2. Estos puntos son posibles máximos o mínimos.

Para:

x < –2, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece;

–2 < x < 0, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece $\Rightarrow$ en x = –2 hay un mínimo.

0 < x < 2, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece $\Rightarrow$ en x = 0 hay un máximo.

x > 2, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece $\Rightarrow$ en x = 2 hay un mínimo.

Como el mínimo vale $f(-2) = f(2) = -16 + p > 0 \Rightarrow$ la función siempre toma valores positivos. Por tanto, nunca corta al eje OX.

F07. La función $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-a}$ tiene:

a) Un mínimo relativo si $a \neq 1/3$

b) Una asíntota vertical para cualquier valor de $a \neq 0$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f'(x)=\frac{3(x-a)-3x+1}{(x-a)^2}=\frac{1-3a}{(x-a)^2}$$

Si $a \neq 1/3$ la derivada no se anula en ningún caso, la función no puede tener mínimos relativos (ni máximos).

Si $a = 1/3$, la función es $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-1/3}=\dfrac{3(3x-1)}{3x-1}$; que no está definida en x = 1/3 pero tiene una discontinuidad evitable. Luego no tiene asíntota vertical.

F07. El valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - x - \cos x}{sen^2 x}$ es:

a) 1/2 b) −1

c) Ninguna de las anteriores, su valor es: 1

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos x}{sen^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\text{(aplicando L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + senx}{2senx\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\text{(L´H)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{2\cos x\cos x-2senxsenx}=\frac{2}{2}=1$$

F07. La función $f(x)=(x-1)e^{x+1}$ es:

a) Creciente para todo $x > -1$

b) Convexa ($\cup$) para todo $x > -1$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f(x)=(x-1)e^{x+1} \;\Rightarrow\; f'(x)=xe^{x+1} \;\Rightarrow\; f''(x)=(x+1)e^{x+1}$$

La función tiene un punto de inflexión en x = −1. Para x < −1 es cóncava ($\cap$); para x > −1 es convexa ($\cup$).