PREGUNTAS DE TIPO TEST

DERIVADAS Y APLICACIONES

1. La función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{senx} & \text{si } x\neq 0\\ p & \text{si } x=0\end{cases}$ es continua en x = 0 si:

a) p = ½. b) p = 0. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Para que sea continua en x = 0 debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx-x}{xsenx}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L´H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{senx+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L´H}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-senx}{\cos x+\cos x-xsenx}=0.$$

→ La respuesta es b).

2. La función $f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & \text{si } x\leq 0\\ 2x+1, & \text{si } x>0\end{cases}$ es derivable en x = 0 si:

a) Sólo si a = 2.
b) Para cualquier valor de a.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Los límites laterales coinciden con $f(0) = 1$, pues:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{ax} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+1) = 1$$

Por tanto, la función es continua en x = 0.

Salvo en x = 0, su derivada es $f´(x)=\begin{cases}ae^{ax}, & \text{si } x<0\\ 2, & \text{si } x>0\end{cases}$

Las derivadas laterales en x = 0 valen:

$f´(0^-) = a$ $f´(0^+) = 2$ ⇒ La función es derivable si a = 2.

→ La respuesta es a).

3. La ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa x = 1 es:

a) $y=\dfrac{1}{2}x$ b) $y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{5}{8}$ c) $y = 2x$

Solución:

$y=\dfrac{2}{x+3} \Rightarrow y=\dfrac{-2}{(x+3)^2}$ → $y(1) = 1/2$; $y´(1) = -1/8$ ⇒ tangente: $y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{5}{8}$

→ La respuesta es b).

4. La función $f(x) = 2x + \sin x$ tiene :

a) Infinitos máximos. b) Una asíntota oblicua.

b) No tiene ni máximo ni asíntotas.

Solución:

$f´(x) = 2 + \cos x$ > 0 siempre $\Rightarrow$ No hay máximos ni mínimos.

Es obvio que no tiene asíntotas verticales; lo mismo para horizontales. Veamos oblicua ($y = mx + n$):

$$m = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{f(x)}{x} = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{2x + senx}{x} = 2\,; \quad n = \underset{x\to\infty}{lím}(f(x) - mx) = \underset{x\to\infty}{lím}\; senx \text{ no existe.}$$

Por tanto, tampoco hay asíntota oblicua.

$\to$ La respuesta es c).

5. Dada $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2 - 3)^3}$, los valores de $f´(1)$ y $f´´(1)$ son, respectivamente:

a) 1 y 14 b) –1 y 4 c) –1 y –21/4

Solución:

$$f´(x) = \frac{-10x^2 - 6}{(x^2 - 3)^4} \;\to\; f´(1) = -1; \qquad f´´(x) = \frac{60x^3 + 108x}{(x^2 - 3)^5} \;\to\; f´´(1) = -21/4$$

$\to$ La respuesta es c).

6. La función $f(x) = e^{p+x^2}$ tiene un mínimo local en $x = 0$:

a) Cualquiera que sea el valor de p. b) Sólo si $p < 0$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f´(x) = 2xe^{p+x^2} \to x = 0$ es punto singular; $f´´(x) = (2 + 4x^2)e^{p+x^2} \;\to\; f´´(0) > 0$. Mínimo.

En ningún caso depende de p.

$\to$ La respuesta es a).

7. La recta tangente a la curva $y = e^{px}$, en el punto de abscisa $x = 1$ pasa por el origen de coordenadas si:

a) Si $p > 0$. b) Sólo si $p = 1$. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$y = e^{px} \;\to\; y´ = pe^{px}$

En $x = 1$: $y(1) = e^p \;\to\; y´(1) = pe^p$

La tangente en ese punto es: $y - e^p = pe^p(x - 1)$

Para que pase por (0, 0): $0 - e^P = pe^P(0 - 1) \;\Rightarrow\; (p - 1)e^p = 0 \;\Rightarrow\; p = 1$.

$\to$ La respuesta es b).

8. La función $f(x) = e^{-x} + px - 1$ tiene:

a) Un mínimo si $p > 1$. b) Un punto de inflexión si $p = -1$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f´(x) = -e^{-x} + p = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x} = p \;\Rightarrow x = -\ln p$ (posible máximo o mínimo)

$f´´(x) = e^{-x} \;\to\; f´´(-\ln p) = p$, que es > 0 si $p > 1 \;\Rightarrow$ Hay mínimo si $p > 1$.

$\to$ La respuesta es a).

9. El $\lim_{x\to 1} \dfrac{sen(x-1)}{x^2-3x+2}$ vale:

a) 1 b) –1 c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{sen(x-1)}{x^2-3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{2x-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

→ La respuesta es b).

10. La función $g(x) = \begin{cases} ax(x+1) & \text{si } x \le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en todo **R** si:

a) $a = 1$ b) $a = -1$

c) Dicha función puede ser continua, pero nunca puede ser derivable en x = 0.

Solución:

Es continua en $x = 0$, pues:

si $x \to 0^-$, $g(x) \to 0$; si $x \to 0^+$, $g(x) \to 0$

Para que sea derivable:

$$g´(x) = \begin{cases} 2ax + a & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

si $x \to 0^-$, $g´(x) \to a$; si $x \to 0^+$, $g´(x) \to 1 \Rightarrow a = 1$

→ La respuesta es a).

11. La función $f(x) = \dfrac{x^5 - x^8}{1-x^6}$ tiene:

a) Una asíntota vertical y una discontinuidad evitable.
b) Dos asíntotas verticales.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La función es discontinua cuando $1-x^6 = 0 \Rightarrow$ x = –1 o x = 1.

La discontinuidad puede evitarse si existe límite.

En x = –1, como $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^5-x^8}{1-x^6} = \left[\dfrac{-2}{0}\right] = \infty$, la función tiene una asíntota vertical: x = –1.

En x = 1, como

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5-x^8}{1-x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(L´H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{5x^4-8x^7}{-6x^5} = \frac{5-8}{-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

la discontinuidad puede evitarse, definiendo $f(1) = \dfrac{1}{2}$

→ La respuesta es a).

12. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ es derivable en $x = 2$ si:

a) $b = -2a$.
b) Sólo si $a = -2$ y $b = 4$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Continuidad.
Si $x \to 2^-$, $f(x) \to 4 + 2a + b$
Si $x \to 2^+$, $f(x) \to 4 \quad \Rightarrow 4 + 2a + b = 4 \Rightarrow 2a + b = 0$
Derivabilidad.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Si $x \to 2^-$, $f'(x) \to 4 + a$
Si $x \to 2^+$, $f'(x) \to 2 \quad \Rightarrow 4 + a = 2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = 4$

13. La función $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$ tiene en el intervalo [0, 2].
a) Un mínimo en x = $\pi/3$.
b) Un máximo en x = $\pi/2$.
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:
Derivada: $f'(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$ $\to$ Se anula en $x = \pi/3$ y en $x = 5\pi/3$, entre 0 y 2π.

Derivada segunda: $f''(x) = \dfrac{-2\sin x(1 + \cos x)}{(2 - \cos x)^3}$

Como $f''(\pi/3) < 0$, en x = $\pi/3$ se da un máximo.
Como $f''(5\pi/3) > 0$, en x = $5\pi/3$ se da un mínimo.
$\to$ La respuesta es c).

14. La función $f(x) = ax^2 + \dfrac{1}{x}$ tiene un punto de inflexión en $x = 2$ si:
a) $a = -1/8$. b) $a = -8$.
c) Nunca tiene puntos de inflexión.
Solución:

$$f(x) = ax^2 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2ax - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2a + \frac{2}{x^3}$$

Para que se tenga un punto de inflexión en $x = 2$ debe cumplirse que $f''(2) = 2a + \dfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow$

$a = -\dfrac{1}{8}$.
$\to$ La respuesta es a).

15. La función $f(x) = e^x + 2x$ corta al eje OX:
a) Sólo una vez. b) Dos veces. c) No corta al eje OX.
Solución:
$f(x) = e^x + 2x \Rightarrow f'(x) = e^x + 2 > 0$, luego es siempre creciente.
Como $f(-1) = e^{-1} - 2 < 0$ y $f(0) = 1$, la función corta una sola vez.
$\to$ La respuesta es a).

16. La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ en su punto de inflexión es:

a) $y = 3x + 1$ b) $y = -3x - 1$

a) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$ es PI.

La tangente es: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y - 2 = -3(x+1) \Rightarrow y = -3x - 1$

$\rightarrow$ La respuesta es b).

17. La función $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \le 0 \\ x - ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en toda la recta real:

a) Para cualquier valor de *a*.

b) Sólo si *a* = –1.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

El único punto que presenta dificultades es *x* = 0.

- Continuidad en x = 0 (para que una función sea derivable es necesario que sea continua):

Si $x \to 0^-$, $f(x) = \sin x \to 0$

Si $x \to 0^+$, $f(x) = x - ax^2 \to 0$

Como los límites laterales coinciden, la función es continua para cualquier valor de *a*.

- Derivabilidad.

Salvo para *x* = 0, la función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 - 2ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Si $x \to 0^-$, $f'(x) = \cos x \to 1$

Si $x \to 0^+$, $f'(x) = 1 - 2ax \to 1$

Como las derivadas laterales coinciden, independientemente del valor de *a*, la función dada es derivable siempre.

$\rightarrow$ La respuesta es a).

18. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, en el punto *P* de la curva de abscisa *x* = 3, es:

a) $y = -5x + 22$ b) $y = -3x + 15$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a *f*(*x*) en el punto (*a*, *f*(*a*)) es: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Se tiene: *f*(3) = 7, *f* ´(3) = –5.

La recta tangente será: $y - 7 = -5(x - 3) \Rightarrow y = -5x + 22$

$\rightarrow$ La respuesta es a).

19. La función $f(x) = \dfrac{m}{1+x^2}$ tiene:

a) Un mínimo relativo si $m > 0$.
b) Dos puntos de inflexión si $m \neq 0$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f(x) = \frac{m}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2mx}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2m(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

La derivada primera se anula si $x = 0$, independientemente del valor de m.
Si $m > 0$, $f''(0) < 0 \rightarrow$ en $x = 0$ se tendría un máximo.
Si $m < 0$, $f''(0) > 0 \rightarrow$ en $x = 0$ se tendría un mínimo.
Si $m \neq 0$, la derivada segunda se anula en $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, hay dos puntos de inflexión.
$\rightarrow$ La respuesta es b).

20. La función $f(x) = 2 + 2x - e^x$, en el intervalo (0, 1), cumple:

a) Corta una vez al eje OX.
b) Tiene un máximo.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$f(x) = 2 + 2x - e^x \Rightarrow f'(x) = 2 - e^x \Rightarrow f''(x) = -e^x$$

La derivada primera se anula en $x = \ln 2 \in (0, 1)$. Como $f''(\ln 2) < 0$, la función tendrá un máximo en $x = \ln 2$.
$\rightarrow$ La respuesta es b).

21. Los infinitésimos en $x = 0$, $f(x) = x\sin x$ y $g(x) = 1-\cos x$ son:

a) Equivalentes. b) Del mismo orden. c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L´Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L´Hôpital}) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \text{Son del mismo orden.}$$

$\rightarrow$ La respuesta es b).

22. La función $f(x) = xe^x$ es cóncava ($\cap$) en el intervalo:

a) $(-\infty, -2)$ b) $(-\infty, 2]$ c) $[2, +\infty)$

Solución:

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = (1+x)e^x \Rightarrow f''(x) = (2+x)e^x$$

$f''(x) = 0$ si $x = -2 \Rightarrow$ en $x = -2$ hay P.I.
Si $x < -2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava ($\cap$)
Si $x > -2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la función es convexa ($\cup$)
$\rightarrow$ La respuesta es a).

23. La función $f(x)=x^5-5x^3$ tiene:
a) Dos máximos relativos. b) Tres puntos de inflexión.
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:
$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2 \Rightarrow f''(x)=20x^3-30x$
$f'(x)=5x^4-15x^2=0 \Rightarrow x=0;\ x=\pm\sqrt{3}$
$f''(x)=20x^3-30x=0 \Rightarrow x=0;\ x=\pm\sqrt{3/2}$ $\Rightarrow$ Hay tres punto de inflexión, pues
$f'''(x)=60x^2-30 \neq 0$ en esos tres puntos.
Como:
$f''(+\sqrt{3})>0$, en $x=+\sqrt{3}$ se tiene un máximo;
$f''(-\sqrt{3})<0$, en $x=-\sqrt{3}$ se tiene un mínimo.
$\to$ La respuesta es b).

24. La continuidad, en el punto $x = 0$, de la función dada por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{px} & \text{si } x<0\\ \dfrac{\cos x}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$
se consigue cuando:
a) $p = 1$ b) $p = \ln 2$
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:
Para que una función sea continua en $x = a$ es necesario que los límites laterales existan y sean iguales.
Por la izquierda:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^x-1}{px}=\left[\frac{0}{0}\right]=(\text{L´Hôpital})=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^x\ln 2}{p}=\frac{\ln 2}{p}$$
Por la derecha:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{x^2+1}=\frac{1}{1}=1$$
Será continua cuando $\dfrac{\ln 2}{p}=1 \Rightarrow p=\ln 2$.
$\to$ La respuesta es b).

25. La ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, f(0)) es:
a) $y=x-1$ b) $y=-2x$
c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es: ______
Solución:
$$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$
Se tiene: $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$.
La recta tangente será: $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow y-0=2(x-0) \Rightarrow y=2x$
$\to$ La respuesta es c): $y=2x$

26. La función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ corta al eje *OX*:
a) Una sola vez.
b) Exactamente dos veces.
c) Ninguna de las anteriores.
Solución:
Como $f(0) = -1$ y $f(1) = 2$, por el teorema de Bolzano se deduce que la función corta al eje *OX* en el intervalo (0, 1) $\Rightarrow$ al menos corta una vez al eje *OX*.
Como $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ para todo *x*, la función será siempre creciente. En consecuencia, sólo corta una vez al eje *OX*.
$\rightarrow$ La respuesta es a).

27. La función $f(x) = x^4 e^{-x}$ verifica:
a) Siempre es decreciente.
b) Tiene un máximo y un mínimo.
c) Tiene una asíntota vertical.
Solución:
Derivando:
$$f(x) = x^4 e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3 e^{-x}(4 - x)$$
La derivada se anula en $x = 0$ y $x = 4$, por tanto hay que estudiar lo que pasa en los intervalos: $x < 0$; $0 < x < 4$; $x > 4$.
- si $x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente;
- si $0 < x < 4$, $f'(\mathrm{x}) > 0 \Rightarrow f$ es creciente;
- si $x > 4$, $f'(\mathrm{x}) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente;

Como la derivada se anula en $x = 0$, es decreciente si $x < 0$ y creciente cuando $x > 0$, en $x = 0$ la función tiene un mínimo. De manera análoga concluimos que en $x = 4$ se da un máximo.
$\rightarrow$ La respuesta es b).