Sistemas de ecuaciones lineales

<u>Observación</u>: La mayoría de estos sistemas se han propuesto en las pruebas de Selectividad, en los distintos distritos universitarios españoles.

---

1. La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, en forma reducida por el método de Gauss, es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿El sistema es compatible o incompatible? Razona la respuesta.
b) Resolverlo en el caso de que sea compatible.

Solución:
a) Como puede observarse, la tercera fila es nula; en consecuencia, el rango de la matriz ampliada es 2, igual al rango de la matriz de coeficientes. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

El menor de la matriz de coeficientes $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

NOTA: Podría recordarse el **Teorema de Rouché–Fröbenius:**
Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución si el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas (A) es igual al rango de la matriz ampliada con la columna de los términos independientes (M), y recíprocamente. Esto es:

el sistema es compatible $\Leftrightarrow$ rango de A = rango de M

- Si ambos rangos son iguales al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado: el sistema tiene una única solución.
- Si ambos rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado: el sistema tiene infinitas soluciones.

b) El sistema equivalente al dado puede escribirse así:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y + z \\ y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

2. Dado el sistema de ecuaciones:

$$S \equiv \begin{cases} x + 2y + z = A \\ x + y + z = B \\ x + y - z = C \end{cases}$$

demostrar que es compatible determinado para cualquier valor de *A*, *B* y *C* y encontrar la solución en función de dichos valores.

Solución:
Un sistema es compatible determinado si el rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas e igual al rango de la matriz ampliada.

En este caso, como el determinante de la matriz de coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el rango de esa matriz es 3. Como la matriz ampliada sigue teniendo tres filas, su rango no puede ser mayor. En consecuencia, el sistema es compatible determinado.

La solución la hallamos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & 2 & 1 \\ B & 1 & 1 \\ C & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2A + 3B + C}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & A & 1 \\ 1 & B & 1 \\ 1 & C & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2A - 2B}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & A \\ 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{B - C}{2}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación $AX = \alpha X$.

b) Resolver la ecuación matricial $AX = 2X$.

Solución:

a) $AX = \alpha X \Leftrightarrow AX - \alpha X = O \Leftrightarrow (A - \alpha I)X = O \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-\alpha & 4 \\ -1 & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene el sistema $\begin{cases} (6-\alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (1-\alpha)y = 0 \end{cases}$.

Para que este sistema tenga solución única es necesario que el rango de la matriz de coeficientes valga 2. Para ello:

$$\begin{vmatrix} 6-\alpha & 4 \\ -1 & 1-\alpha \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 - 7\alpha + 10 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 2 \text{ y } \alpha \neq 5.$$

Por tanto, siempre que $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 5$ la ecuación $AX = \alpha X$ tendrá solución única, y esta solución será $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) La ecuación $AX = 2X$ es la correspondiente cuando $\alpha = 2$. Da lugar al sistema

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $x = -y$. Luego, la matriz solución es $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$.

4. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2a & -2 & a^2\\ -1 & a & -1\\ 2 & 1 & a\end{pmatrix}$$

a) Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) En el caso a = 2, discutir el sistema $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ b\end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) En el caso a = 1, resolver el sistema $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$.

Solución:

a) El determinante de la matriz vale:

$$|A|=\begin{vmatrix}2a & -2 & a^2\\ -1 & a & -1\\ 2 & 1 & a\end{vmatrix}=2a\left(a^2+1\right)+2(-a+2)+a^2(-1-2a)\ =-a^2+4\,.$$

El determinante de A vale 0 si a = –2 o a = 2.

Por tanto:

- Si $a \neq \pm 2$ el rango de A es 3: r(A) = 3; y si a = –2 o a = 2, r(A) < 3.
- Para a = –2, $A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Como el menor $\begin{vmatrix}-4 & -2\\ -1 & -2\end{vmatrix}=6\neq 0\ \Rightarrow$ r(A) = 2.
- Para a = 2, $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Su rango también es 2, pues $\begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6\neq 0$.

b) En el caso a = 2, el rango de la matriz de coeficientes es 2; y el sistema

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ b\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ b\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}4x-2y+4z=2\\ -x+2y-z=1\\ 2x+y+2z=b\end{cases}.$$

Como se ha visto, para a = 2, el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Calculo del rango de la matriz ampliada:

El menor: $\begin{vmatrix}4 & -2 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & b\end{vmatrix}=6b-18$.

Por tanto:

- Si b = 3, su valor es 0 y tendrá rango 2. El sistema será compatible indeterminado.
- Si $b \neq 3$, tendrá rango 3. El sistema será incompatible.

Para $a = 2$ y $b = 3$ el sistema es equivalente a $\begin{cases} 4x-2y+4z=2 \\ -x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y=1+z \\ 2x+y=3-2z \end{cases}$.

Su solución es $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$.

c) En el caso $a = 1$ el sistema es compatible determinado.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+z=-1 \\ -x+y-z=2 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} 2x-2y+z=-1 \\ -x+y-z=2 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1+2E2 \\ \\ E3+2E2 \end{matrix} \begin{cases} -z=3 \\ -x+y-z=2 \\ 3y-z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-3 \\ x=y-z-2 \\ 3y=z+6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases}$$

5. Estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$T \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=a \\ x+3y=b \\ x+4y=2a \end{cases}$$

en función de a y b.

Solución:

Como el rango de la matriz de coeficientes es 2 (basta con calcular cualquiera de los menores posibles), el sistema será compatible cuando el rango de la matriz ampliada también sea 2.

Esta matriz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 4 & 2a \end{pmatrix} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ f2-f1 \\ f3-f1 \\ f4-f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 2 & b-1 \\ 0 & 3 & 2a-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Leftrightarrow \\ f3-2f2 \\ f4-3f2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & b-2a+1 \\ 0 & 0 & -a+2 \end{pmatrix}$$

Para que su rango sea 2 es preciso que $a = 2$ y $b = 3$. (Obsérvese que si $a = 2$, la cuarta fila es nula; y si $a = 2$ y $b = 3$, se anula también la 3ª fila.)

En los demás casos el sistema es incompatible.

6. a) Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}.$$

b) Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Solución:

a) La solución dependerá del rango de las matrices A y A^*, ampliada de A.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & m-1 & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{array}\right) = A^*$$

Como $|A| = (m-2)\left((m-1)^2 - 1\right) = (m-2)\left(m^2 - 2m\right) = m(m-2)^2$, que vale 0 cuando $m = 0$ ó $m = 2$, se tendrá:

- Si $m \neq 0$ y $2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(A^*) → el sistema es compatible determinado.
- Si $m = 0$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = A^*$. Como la columna 4ª, C4, es proporcional a C1 se tiene que el r(A^*) = r(A) = 2 → el sistema será compatible indeterminado.
- Si $m = 2$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) = A^*$. Es evidente que r($A^*$) = 2 y r($A$) = 1 → el sistema será incompatible.

b) Si $m = 0$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = A^*$. El sistema equivalente es: $\begin{cases} y - z = 0 \\ -2x = 2 \end{cases}$.

Haciendo $z = t$, su solución será: $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

Si $m = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = A^*$. El sistema equivalente es: $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ -x = 3 \end{cases}$.

Su solución es evidente: $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

7. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones cuando sea compatible determinado.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=11 \end{cases}$$

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible determinado cuando el rango de A sea igual al rango de M e igual al número de incógnitas: r(A) = r(M) = 3.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{array}\right)=M$$

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{vmatrix}=14-2k$.

Con esto, si $k\neq 7 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

Hallamos su solución aplicando la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4-4}{14-2k}=0\,;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 11 & 4 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{7-k}{14-2k}=\frac{1}{2}\,;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ k & 10 & 11 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{21-3k}{14-2k}=\frac{3}{2}$$

8. Encuentra el valor, o valores, del parámetro α que hacen que el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sea incompatible.

Solución:
Se estudia el rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + \alpha + \alpha^2$$

Los valores que anulan el determinante son α = 1 y α = –2. Por tanto:

- Si α ≠ 1 y α ≠ –2, el rango de la matriz de coeficientes es 3 y el sistema compatible determinado.
- Si α = 1, el rango de la matriz de coeficientes (A) y el de la matriz ampliada (M) son iguales a 2; el sistema será compatible indeterminado. Efectivamente, si α = 1:
$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = M \text{ , siendo el menor } M_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
- Si α = –2, el rango de la matriz de coeficientes es 2, siendo el de la matriz ampliada 3. En consecuencia, en este caso el sistema será incompatible. Efectivamente, si α = –2:
$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = M \text{ , siendo el menor } M_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Por tanto, el valor de α que hace que el sistema sea incompatible es –2.

9. Estudiar, según los valores del parámetro *a*, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay + z = a-1 \\ -ax + (a+1)y = a \\ ax - y + (2a-1)z = 2a+1 \end{cases}$$

Solución:
Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & a-1 \\ -a & a+1 & 0 & a \\ a & -1 & 2a-1 & 2a+1 \end{array}\right) = M$$

El determinante de A,

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & a+1 & 0 \\ a & -1 & 2a-1 \end{vmatrix} = a + a^2(2a-1) - a(a+1) = 2a^3 - 2a^2 = 2a^2(a-1)$$

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y 1 $\Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si *a* = 0, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$

Como la 1ª columna (C1) es nula y la C3 = –C4, el rango de ambas matrices es 2: r(*A*) = r(*M*) = 2. En consecuencia, el sistema será compatible indeterminado.

- Si *a* = 1, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) = M$.

El rango de *A* es 2, pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Pero el rango de *M* es 3, pues el menor

$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$. En consecuencia, el sistema será incompatible.

10. Discutir la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones

$$S \equiv \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$$

en función del parámetro *a*.

Solución:

Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de *A* sea igual al de *M*: r(*A*) = r(*M*).

Las matrices son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & a & 2 \end{array}\right) = M$$

El determinante de *A*, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 - 2a = -2a(a+1)$.

Este determinante vale 0 si $a = 0$ o $a = -1$

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 0$ se tiene:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = M$$

Como F3 = F1 + F2 $\Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = -1$ se tiene:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = M$$

El rango de *A* es 2; mientras que el rango de *M* vale 3, pues $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Por consiguiente, si $a = -1$, el sistema es incompatible.

11. Considera este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de *m*.
b) Calcula los valores de *m* para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

Solución:
a) Hay que estudiar los rangos de la matriz de coeficientes (*A*) y de la matriz ampliada (*M*).

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{array}\right) = M$$

El determinante de *A*, $|A| = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1$

Este determinante vale 0 si $m = -1$ o $m = 1$

Con esto:

- Si $m \neq -1, 1 \Rightarrow$ r(*A*) = 2 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si $m = -1$ se tiene:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = M$$

El rango de *A*, r(*A*) = 1; mientras que r(*M*) = 2. En consecuencia, el sistema será incompatible.

- Si $m = 1$ se tiene:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$$

Como las dos filas de la matriz son iguales $\Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 1. El sistema será compatible indeterminado.

b) Si $x = 3$, se tendrá:

$$\begin{cases} 3m - y = 1 \\ 3 - my = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3m - 1 \\ 3 - my = 5 \end{cases} \Rightarrow 3 - m(3m-1) = 2m - 1$$

$$\Rightarrow 3m^2 + m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4/3;\ m = 1$$

- Para $m = -4/3$, el sistema tiene por solución: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$. En este caso, al ser el sistema compatible determinado: la solución es única.
- Para $m = 1$, el sistema tiene por solución: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$. En este caso, al ser el sistema compatible indeterminado, la solución es una de las infinitas posibles.

12. Estudiar según el valor del parámetro λ, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + z = \lambda^2 \end{cases}$$

y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado.

Solución:
Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema es compatible cuando dichas matrices tienen el mismo rango; en caso contrario, el sistema no tiene solución.
Las matrices son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{array}\right) = M$$

El determinante de *A*, $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

Este determinante vale 0 si λ = 1.

Con esto:
- Si $\lambda \neq 1 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si λ = 1, las matrices son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$$

Como las tres filas de *M* son iguales, el rango de *A* y el de *M* son iguales a 1. El sistema será compatible indeterminado, con dos grados de indeterminación.
En este caso, el sistema es equivalente a:

$E1: \ \{x + y + z = 1 \Leftrightarrow \{x = 1 - y - z$,

Su solución es $\begin{cases} x = 1 - p - q \\ y = p \\ z = q \end{cases}$

13. Estudiar el sistema según los valores de m y resolverlo para $m = -1$.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al rango de M. Si r(A) = r(M) = 3, será compatible determinado; si r(A) = r(M) < 3, compatible indeterminado.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m = m(m-1)$

Con esto:

- Si $m \neq 0$ y 1 $\Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $m = 1$, las matrices son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = M$, con r(A) = 2 y r(M) = 3, pues el

  menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Por tanto el sistema será incompatible.
- Si $m = 0$, las matrices son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = M$, con r(A) = 2 y r(M) = 2, pues la

  columna de los términos independientes está repetida.. En este caso, el sistema será compatible indeterminado.

- Si $m = -1$, el sistema queda $\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Su solución

  puede hallarse por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{2}$$

14. Estudiar el sistema según los valores de *k* (6 puntos) y resolverlo cuando k = 1 (4 puntos)

$$\begin{cases} x+y+z=k \\ x+(1+k)y+z=2k \\ x+y+(1+k)z=0 \end{cases}$$

Solución:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando el rango de A sea igual al rango de M: r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1+k & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 1+k & 0 \end{array}\right)=M$$

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \\ 1 & 1 & 1+k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}=k^2$

Con esto, si $k \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

Si k = 0, las matrices quedan: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)=M$, siendo el rango de ambas igual a 1:

r(A) = r(M) = 1. En este caso, el sistema será compatible indeterminado con 2 grados de indeterminación

Si k = 1 el sistema será: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$, que resolvemos por Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-2}{1}=1;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4+1-2-2}{1}=1;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-4}{1}=-1$$

15. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \end{cases}$, con λ parámetro real, se pide:

a) Determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
b) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible determinado.
c) Hallar el conjunto de soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado.

Solución:

a) Se estudian los rangos de la matriz de coeficientes, *A*, y de la matriz ampliada, *M*.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \end{array}\right)=M$$

Determinante de *A*:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix}=-\lambda^2+3\lambda-2=-(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Este determinante vale 0 si λ = 1 o λ = 2.

- Para λ = 1, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right)=M$.

El rango de *A* es 2, pues la matriz *A* tiene proporcionales las columnas 1ª y 3ª.

Como el menor $M_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}=6\neq 0$, el rango de *M* es 3. En consecuencia, el sistema es incompatible.

- Para λ = 2, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right)=M$.

Como el menor $M_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}=2\neq 0$, el rango de *M* es 3, mientras que el rango de *A* es 2, pues la matriz A tiene dos columnas iguales.

En consecuencia:

- Si λ ≠ 1, 2, r(*A*) = 3 = r(*M*) $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Si λ = 1, r(*A*) = 2 y r(*M*) = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si λ = 2, r(*A*) = 2 y r(*M*) = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para λ ≠ 1 y 2, la solución del sistema, que hallamos por Cramer, es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 3\lambda & 2 & -1\\ 6 & \lambda & -2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2\lambda^2+2\lambda+6}{-(\lambda-1)(\lambda-2)}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & \lambda & -1\\ \lambda & 3\lambda & -1\\ 2 & 6 & -2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2\lambda^2-6\lambda+6}{-(\lambda-1)(\lambda-2)}=\frac{2(\lambda-3)}{-(\lambda-1)}\ ;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ \lambda & 2 & 3\lambda\\ 2 & \lambda & 6\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+12}{-(\lambda-1)(\lambda-2)}=\frac{\lambda^2-\lambda-6}{-(\lambda-1)}$$

16. (a) Estudiar, según los valores del parámetro *a*, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay - z = a \\ 2ax - y + az = 1 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

b) Resolverlo, si es posible, utilizando la regla de Cramer para el valor $a = -1$.

Solución:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ 2a & -1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = M$$

El determinante de *A*, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4 = (a-1)(a+4)$

Con esto:

- Si $a \neq 1$ y $-4 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 1$, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = M$

El rango de *A* es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; en cambio, el rango de *M* es 3, pues el menor

$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. En consecuencia, el sistema será incompatible.

- Si $a = -4$, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -4 \\ -8 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = M$.

El rango de *A* es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = -33 \neq 0$. Como antes, el rango de *M* es 3, pues el menor

$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 25$. En consecuencia, el sistema será incompatible.

b) Si $a = -1$ el sistema es $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ -2x - y - z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$; siendo $|A| = -6$.

Por tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2+2}{-6} = -\frac{4}{6}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1+4}{-6} = -\frac{5}{6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5-2}{-6} = \frac{7}{6}$$

17. a) Clasifique, en función de los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + \lambda z = 2 \\ \lambda x + \lambda y - z = 5 \\ (\lambda + 1)x + \lambda y - z = \lambda \end{cases}$$

b) Resuélvalo, si es posible, para λ = 0.

Solución:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 & 5 \\ \lambda+1 & \lambda & -1 & \lambda \end{array}\right) = M$$

El determinante de A,. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda+1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2$

Con esto:

- Si λ ≠ ±1 ⇒ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si λ = –1, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) = M$

El menor $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9$

Luego: r(A) = 2, r(M) = 3 → el sistema es incompatible.

- Si λ = 1, las matrices quedan: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$

El menor $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

Luego: r(A) = 2, r(M) = 3 → el sistema es incompatible.

b) Para λ = 0, el sistema queda: $\begin{cases} x - y = 2 \\ -z = 5 \\ x - z = 0 \end{cases}$

cuya solución es: $\begin{cases} x = -5 \\ y = -7 \\ z = -5 \end{cases}$

18. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-1)x+y+z=3 \\ mx+(m-1)y+3z=2m-1 \\ x+2y+(m-2)z=4 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los distintos valores de *m*.
b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) El sistema será compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes (*A*) sea igual al rango de la matriz ampliada (*M*), donde

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3 \\ m & m-1 & 3 & 2m-1 \\ 1 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right)=M$$

El determinante de *A*,

$$|A|=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & 3 \\ 1 & 2 & m-2 \end{vmatrix}=m^3-5m^2+2m+8 \to m^3-5m^2+2m+8=0$$

Las soluciones de $m^3-5m^2+2m+8=0$ son *m* = –1, 2 y 4. La primera raíz se encuentra por tanteo (entre los divisores de 8); las otras dos descomponiendo en factores y resolviendo la ecuación resultante de 2º grado.

Por tanto:

- Si *m* ≠ –1, 2 y 4, el r(*A*) = r(*M*) = 3 ⇒ el sistema será compatible determinado..
- Para $m=-1$, queda $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)=M$

El rango de la matriz *A* es 2, pues en ella F3 = –F2, mientras que $A_1=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=5\neq 0$.

El rango de *M* es 3, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=5$.

Luego si *m* = –1 el sistema será incompatible.

- Para $m=2$, queda $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)=M$

El rango de la matriz *A* es 2, pues $A_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$.

El rango de *M* es 3, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-12+6-4-18\neq 0$.

Luego si *m* = 2 el sistema será incompatible.

- Para $m = 4$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) = M$.

El rango de ambas matrices vale 2, pues en la matriz *M*, F2 = F1 + F3. Por tanto, para *m* = 4 el sistema es compatible indeterminado.

b) Si *m* = 4, el sistema es:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 7 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 - z \\ x + 2y = 4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2/5 \\ y = 9/5 - t \\ z = t \end{cases}$$

19. Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x+(m-1)y-z=3 \\ mx-y+z=2 \\ x+my-z=1 \end{cases}$$

Se pide:
a) Resolverlo para $m = 1$.
b) Discutirlo para los distintos valores de m.

Solución:
a) Si $m = 1$ el sistema queda:

$$\begin{cases} 3x \quad -z=3 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases} \to \text{(por Gauss)} \to \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} 3x \quad -z=3 \\ 4x-y=5 \\ -2x+y=-2 \end{cases}$$

$$\to \begin{matrix} \\ \\ E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} 3x \quad -z=3 \\ 4x-y=5 \\ 2x=3 \end{cases} \Rightarrow \quad x=\frac{3}{2},\ \text{y} = 1,\ z=\frac{3}{2}$$

b) Calculamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m(m+1) \Rightarrow$$ r(A) = 3 si $m \neq 0, -1$; r(A) = 2 si $m = 0$ o -1.

- Para $m = 0$, la matriz ampliada es $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3, pues

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Para $m = -1$, la matriz ampliada es $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, que también tiene rango 3,

pues $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

En consecuencia: – Si $m \neq 0, -1$ el sistema es compatible determinado.
– Si $m = 0$ o $m = -1$, el sistema es incompatible.

20. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+ay+3z=1 \\ x+y+(2-a)z=a \end{cases}$$

Solución:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de M: r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & a \end{array}\right)=M$$

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix}=a-a^2=a(1-a)$

Este determinante vale 0 si a = 0 o a = 1

Con esto:

- Si $a \neq 0, 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si a = 0 se tendrá:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)=M$$

Como F3 = F1 $\Rightarrow$ r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado.

- Si a = 1 se tendrá:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M$$

El rango de A es 2, las columnas 1ª y 2ª son iguales. Sin embargo, el rango de M vale 3, pues $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$. En este caso, el sistema será incompatible.

- Para $a \neq 0$ y 1, empleando la regla de Cramer, se obtienen las soluciones:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ a & 1 & 2-a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a(2-a)}{a(1-a)}=\frac{4-2a}{1-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 2-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2a}{a(1-a)} = \frac{-2}{1-a}\ ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a(a-1)}{a(1-a)} = -1$$

Para a = 0, el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2z \\ x = 1 - 3z \end{cases}$$

cuya solución es $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$

Sistemas homogéneos

21. Sea el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ ax-y+z=0 \\ x+2ay-z=0 \end{cases}$$

a) Determinar el valor o valores del parámetro *a* para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula.
b) Resolver el sistema para el valor o valores de *a* hallados en el apartado anterior.

Solución:
a) El sistema tiene solución distinta de la nula para aquellos valores de *a* que hagan que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero.

La matriz de coeficientes, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 2a & -1 \end{pmatrix}$, tiene por determinante,

$$|A| = -4a^2 - a = -a(4a+1)$$

que vale 0 cuando $a = 0$ o $a=-\frac{1}{4}$

Por tanto:

- si $a \neq 0$ y $a \neq -\frac{1}{4}$, el sistema tendrá solución única, la nula: x = 0, y = 0, z = 0.
- si $a = 0$ o $a=-\frac{1}{4}$, el sistema tendrá soluciones distintas de la nula.

b) Para $a = 0$ o $a=-\frac{1}{4}$, el rango de la matriz A es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, las soluciones dependerán de una indeterminada.

Para $a = 0$ el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} -y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \text{(haciendo z = t)} \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

Para $a=-\frac{1}{4}$, el sistema inicial es equivalente a: $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -\frac{1}{4}x-y+z=0 \\ x-\frac{2}{4}y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -x-4y+4z=0 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2z \\ 2x-y=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2z \\ 3x=4z \end{cases} \Rightarrow \text{(haciendo } z=3t\text{)} \begin{cases} x=4t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$$

22. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (1-a)x-2y+4z=0 \\ x-(1+a)y+z=0 \\ -x+ay-z=0 \end{cases}$$

a) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro *a*.
b) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Solución:
Como el sistema es homogéneo siempre será compatible. Si el rango de la matriz de coeficientes es 3, será compatible determinado; si vale menos que 3, compatible indeterminado.

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -1-a & 1 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix}=a+3$

Por tanto, si $a\neq -3 \Rightarrow$ r(A) = 3. El sistema será compatible determinado; y su solución, la trivial: x = 0, y = 0, z =0.

Para a = –3, la matriz A queda: $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2, pues el menor $M_1=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=10\neq 0$. Por tanto, el sistema será compatible indeterminado con un grado de indeterminación.

b) Para *a* = –3, el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x-2y+4z=0 \\ x+2y+z=0 \\ -x-3y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-4E2 \\ \\ E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} -10y=0 \\ x+2y+z=0 \\ -y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

23. Discutir y resolver el siguiente sistema de acuerdo con los valores del parámetro *m*.

$$\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$$

Solución:

Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(*A*) = r(*M*).

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & m^2 & m-1 \end{array}\right)=M$$

El determinante de *A*, $|A|=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix}=7m^2-7=7(m-1)(m+1)$

Discusión:

- Si $m\neq\pm1 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si m = 1, r(*A*) = 2 = r(*M*), pues, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)=M$.

El sistema es homogéneo con infinitas soluciones.

- Si m = –1, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)=M$. Los rangos son diferentes, pues el menor

$M_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-4\neq0$. Por tanto: r(*A*) = 2 y r(*M*) = 3 $\rightarrow$ sistema incompatible.

Resolución:

- Si $m\neq\pm1$, por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ m-1 & -1 & m^2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2(m-1)}{7(m-1)(m+1)}=\frac{-2}{7(m+1)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & m-1 & m^2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-(m-1)}{7(m-1)(m+1)}=\frac{-1}{7(m+1)};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}5 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & -1 & m-1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{7(m-1)}{7(m-1)(m+1)}=\frac{1}{m+1}$$

- Si m = 1 el sistema queda:

$$\begin{cases}5x+4y+2z=0\\ 2x+3y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+2z=-4y\\ 2x+z=-3y\end{cases}$$

cuya solución es $\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=-7t\end{cases}$

---

24. a) Discutir el siguiente sistema lineal de ecuaciones, según los valores del parámetro a.
b) En los casos en que sea compatible, resolverlo.

$$\begin{cases}x+2z=0\\ 3y+z=0\\ ax+z=0\end{cases}$$

Solución:
a) Es un sistema homogéneo. Siempre es compatible.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}; \quad |A|=3(1-2a)=0 \text{ si } a=1/2$$

- Si $a \neq 1/2$, r(A) = 3, sistema compatible determinado.
- Si a = 1/2, r(A) = 2. Sistema compatible indeterminado.

b) Si $a \neq 1/2$, la solución es la trivial.
Si a = 1/2, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases}x+2z=0\\ 3y+z=0\end{cases}, \text{ cuya solución es } \begin{cases}x=6t\\ y=t\\ z=-3t\end{cases}$$

25. Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+y-az=a \\ 2x+3y+z=a \end{cases}$$

se pide:

a) Discusión del mismo en función del parámetro a.
b) Resolución en los casos de compatibilidad.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -a & a \\ 2 & 3 & 1 & a \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = -a$, luego:

- Si $a \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 0$, observamos que el sistema es homogéneo y que r(A) = 2 = r(M). El sistema será compatible indeterminado.

Por tanto, el sistema es compatible cualquiera que sea el valor de a.

b)

- Para $a \neq 0$, aplicando la regla de Cramer se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 1 & -a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2+a}{-a} = -a-1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & -a \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2-a}{-a} = a+1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{-a} = -1$$

- Para $a = 0$, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-z \\ x=-y \end{cases}, \text{ cuya solución es } \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$$

SISTEMAS CON DOS PARÁMETROS

26. Discute el sistema $\begin{cases} 2x+ay=1 \\ 2x-y=0 \\ ax+by=-1 \end{cases}$

Solución:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(A) = r(M).

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & b & -1 \end{array}\right)=M$$

<u>Rango de A.</u>

Consideramos los menores de A, $A_1=\begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-2-2a$; $A_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{vmatrix}=2b+a$

$$A_1=-2-2a=0 \Rightarrow a=-1;\ A_2=2b+a=0 \Rightarrow b=-\frac{a}{2}$$

Ambos menores son nulos cuando a = –1 y $b=\frac{1}{2}$. En este caso, r(A) = 1; en los demás caso, r(A) = 2.

<u>Rango de M.</u>

El determinante de M, $|M|=\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & b & -1 \end{vmatrix}=2-a(-2)+2b+a=3a+2b+2$

$$|M|=3a+2b+2=0 \Rightarrow b=-1-\frac{3}{2}a$$

Por tanto, si $b=-1-\frac{3}{2}a \Rightarrow$ r(M) = 2, pues independientemente de los valores que tomen a y b, el menor $M_1=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ b & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

En cambio, si $b\neq -1-\frac{3}{2}a \Rightarrow$ r(M) = 3

<u>Discusión:</u>

- Si $b\neq -1-\frac{3}{2}a \Rightarrow$ r(M) = 3 > r(A), que como máximo es 2. Luego, en este caso, el sistema será incompatible.
- Si $b=-1-\frac{3}{2}a$, pero a = 1, r(M) = 2 y r(A) = 1, pues si a = –1, b toma el valor 1/2. El sistema vuelve a ser incompatible.
- Si $b=-1-\frac{3}{2}a$, con a ≠ 1, r(M) = 2 = r(A) = 1. En este caso, el sistema será compatible determinado.

27. Estudia, según los valores de *a* y *b*, la compatibilidad del sistema. Resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = b \\ x + y + z = 5 \\ 4x - 5y + az = -10 \end{cases}$$

Solución:

Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada. El sistema tendrá solución cuando r(*A*) = r(*M*).

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & a & -10 \end{array}\right) = M$$

El determinante de *A*, $|A| = 3a + 24$, luego:

- Si $a \neq -8 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*), independientemente del valor de *b*. El sistema será compatible determinado.

La solución se puede hallar aplicando la regla de Cramer; quedará en función de *a* y *b*.

- Si $a = -8$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -8 & -10 \end{array}\right) = M$, con rango de *A* = 2. Vemos el rango de *M*. El menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 & b \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix} = -9b$, que valdrá 0 cuando *b* = 0.

Por tanto:

- si $a = -8$ y $b \neq 0$ el sistema será incompatible: r(*A*) = 2 y r(*M*) = 3.
- si $a = -8$ y $b = 0$ el sistema será compatible indeterminado: r(A) = 2 = r(M).

Para si $a = -8$ y $b = 0$ el sistema dado es equivalente a: $\begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ x + y + z = 5 \\ 4x - 5y - 8z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2z \\ x + y = 5 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 10 + 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$$

Otros sistemas:

---

a) $\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ x + by = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$

PROBLEMAS DE SISTEMAS LINEALES

28. En un cajero automático se introducen billetes de 10, 20 y 50 euros. El número total de billetes es 130 y el total de dinero es 3000 €. Se sabe que el número de billetes de 10 € es α veces los billetes de 50 €.
a) Calcula el número de billetes de cada tipo suponiendo que α = 2.
b) Para α = 3 ¿qué ocurre con la situación del cajero planteada?
c) Siguiendo con α = 3, si se tuvieran 100 billetes en el cajero ¿cuanto dinero debería haber para que sea posible una composición del cajero?

Solución:
Si x, y, z es el número de billetes de 10, 20 y 50 euros, respectivamente, se tendrá:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 130 \\ 10x + 20y + 50z = 3000 \\ x = \alpha z \end{array}$$

a) Si α = 2, se tiene:

$$\begin{cases} x + y + z = 130 \\ 10x + 20y + 50z = 3000 \\ x = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 130 \\ 20y + 70z = 3000 \end{cases} \Rightarrow \text{(E2 − 20E1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 10z = 400 $\Rightarrow$ z = 40; x = 80; y = 10.

Habría 80 billetes de 10 €, 10 billetes de 20 € y 40 de 50 €.

b) Para α = 3. Se tendría:

$$\begin{cases} x + y + z = 130 \\ 10x + 20y + 50z = 3000 \\ x = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 4z = 130 \\ 20y + 80z = 3000 \end{cases} \Rightarrow \text{(E2 − 20E1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 0z = 400 $\to$ lo cual es imposible.

En este caso, el sistema sería incompatible.

c) Si α = 3 y el número de billetes fuese 100, llamando D al dinero que debería haber, se tendría:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 10x + 20y + 50z = D \\ x = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 4z = 100 \\ 20y + 80z = D \end{cases} \Rightarrow \text{(E2 − 20E1)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 0z = D − 2000 $\to$ Para que esta igualdad fuera posible es necesario que D = 2000. Así pues, habría que tener 2000 euros.

29. Las edades (en años) de un niño, su padre y su abuelo verifican las siguientes condiciones: La edad del padre es α veces la de su hijo. El doble de la edad del abuelo más la edad del niño y más la del padre es de 182 años. El doble de la edad del niño más la del abuelo es 100.

a) Establece las edades de los tres suponiendo que $\alpha = 2$.
b) Para $\alpha = 3$, ¿qué ocurre con el problema planteado?
c) Siguiendo con $\alpha = 3$, ¿qué ocurre si en la segunda condición la suma es 200 en vez de 182?

Solución:
Si x, y, z son las edades del niño, del padre y del abuelo, respectivamente, se tiene:

$$y = \alpha x$$
$$x + y + 2z = 182$$
$$2x + z = 100$$

a) Si $\alpha = 2$, se tiene:

Niño: x; Padre: y = 2x; Abuelo: z = 100 – 2x

b) Para $\alpha = 3$:

$$y = 3x$$
$$x + 3x + 2z = 182$$
$$2x + z = 100$$

Se tiene: $\begin{cases} 4x + 2z = 182 \\ 2x + z = 100 \end{cases}$. Este sistema es incompatible, pues si a la primera ecuación se le resta dos veces la segunda se tiene: $0 = -18$

c) Si $\alpha = 3$ y la suma es 200 en vez de 182, se tendría:

$$\begin{cases} 4x + 2z = 200 \\ 2x + z = 100 \end{cases}$$

que es un sistema compatible indeterminado; por tanto, tiene infinitas soluciones. Por ejemplo: $x = 15$; $y = 45$; $z = 70$; y otra: $x = 16$; $y = 48$; $z = 68$.

30. Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
En la siguiente tabla se resumen los datos y las relaciones existentes:

Edades	Madre	Hijo 1º	Hijo 2º	Relación de edades
Actualmente	x	y	z	
Hace 14 años	x – 14	y – 14	z – 14	x – 14 = 5(y – 14 + z – 14)
Dentro de 10 años	x + 10	y + 10	z + 10	x + 10 = y + 10 + z + 10
Dentro de x – y (*)		x	z + x – y	z + x – y = 42

(*) Puede observarse que el hijo mayor, que tiene *y* años, tendrá la edad de la madre (x años) dentro de x – y años.

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} -4y-4z=-136 \\ x-y-z=10 \\ 2z=32 \end{cases}$$

Luego: z = 16; y = 18; x = 44.

La madre tiene 44 años; los hijos, 18 el mayor y 16 el menor.

31. Cuando el año 1800 Beethoven escribe su primera Sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert quien compone su célebre Sinfonía Incompleta. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera Sinfonía. Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores. (2,5 puntos)
Nota: Solamente se calificarán los resultados obtenidos matemáticamente, no los derivados de los conocimientos histórico−musicales del examinando.

Solución:
Llamamos x a la edad de Schubert en 1800.

Con los datos del problema se obtiene la siguiente tabla:

		Beethoven	Schubert	Relación
1ª sinfonía	1800	10x	x	
t años después	1800 + t	10x + t	x + t	11x + 2t = 77
5 años después	1800 + t + 5	10x + t + 5	x + t + 5	x + t + 5 = 10x

Se tiene el sistema

$$\begin{cases} xt = (x+6)(t-30) \\ xt = (x+11)(t-44) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x - 6t = -180 \\ 44x - 11t = -484 \end{cases} \Rightarrow \text{ x = 3}$$

Luego, en 1800 Schubert tenía 3 años y Beethoven, 30. Habían nacido, respectivamente, en 1797 y en 1770.

---

32. Eva, Marta y Susana son tres jóvenes amigas que se comprometen a leer *el Quijote* este verano. Cada una por separado y en función del tiempo de que dispone, decide leer un mínimo número de páginas cada día hasta terminar la obra. Eva leerá diariamente 5 páginas más que Marta y está 6 páginas más que Susana. Por ello Eva terminará la obra dos semanas antes que Marta y esta 30 días antes que Susana. Se pregunta cuál es el total de páginas que tiene la versión de la inmortal obra cervantina que leen estas amigas.

Solución:
Llamamos x a las páginas que lee Susana diariamente, y t a los días que tarda.
Se tiene:

	Páginas	Días	Número de páginas
Susana	x	t	xt
Marta	x + 6	t – 30	(x + 6)(t – 30)
Eva	x + 11	t – 44	(x + 11)(t – 44)

Se tiene el sistema

$$\begin{cases} xt = (x+6)(t-30) \\ xt = (x+11)(t-44) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x - 6t = -180 \\ 44x - 11t = -484 \end{cases} \Rightarrow \text{ x = 14; t = 100}$$

El número de páginas será de 14 · 100 = 1400.

33. Un pescadero compra el martes de una semana 96 kg de merluza y 130 kg de anchoas y paga por ello un total de 1836 euros.
El miércoles siguiente, por el efecto de la crisis de las vacas locas, el precio de la merluza ha subido un 20 por ciento y el de las anchoas un 30 por ciento. Ese día, compra 40 kg de merluza y 50 kg de anchoas, y paga un total de 918 euros.
Son los datos anteriores suficientes para calcular el precio de la merluza y las anchoas el martes? Si la contestación es afirmativa calcular dichos precios, si es negativa razonar por qué no se puede hacer dicho cálculo.

Solución:
Martes:
merluza = x euros, anchoas = y euros.

Miércoles:
merluza = 1,20·x euros, anchoas = 1,30·y euros.

Se tendrá el sistema

$$\begin{cases} 96x + 130y = 1836 \\ 40 \cdot 1,20x + 50 \cdot 1,30y = 918 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 96x + 130y = 1836 \\ 48x + 65y = 918 \end{cases}$$

El sistema asociado es compatible indeterminado, pues la ambas ecuaciones son equivalentes (E1 = 2E2). En consecuencia, no se puede determinar los precios pedidos.

34. Cuatro colegiales llamados Luis, Javier, Enrique y Fermín se juntan en el recreo para intercambiar cromos. Fermín tiene cinco cromos más que Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier, y Javier tiene 90 cromos menos que Fermín y Enrique juntos. Calcula cuántos cromos tienen entre los cuatro.

Solución:
Designamos por las iniciales de cada nombre, L, J, E y F, los cromos que tienen cada uno de los colegiales.
Se cumple:

(e1): F = 5 + L + J
(e2): E = 2J
(e3): J = F + E – 90

Sumando (e1) + (e3):

F + J = 5 + L + J + F + E – 90 $\Rightarrow$ L + E = 85

Sustituyendo (e2) en (e3):

J = F + 2J – 90 $\Rightarrow$ F + J = 90

Luego, en total tendrán:

L + E + F + J = 85 + 90 = 175 cromos.

---

35 (CCSS). Dividimos un número de tres cifras, "xyz", entre la suma de éstas y obtenemos 20 de cociente y 3 de resto. La cifra de las decenas, "y", es igual a la mitad de la suma de las otras dos. La cifra de las unidades, "z", es igual a la suma de las otras dos. Hallar el número "xyz".

Solución:
A partir del enunciado se obtienen las siguientes ecuaciones:

100x + 10y + z = 20(x + y + z) + 3

$$y = \frac{x+z}{2}$$

z = x + y

Esto es, el sistema: $\begin{cases} 80x - 10y - 19z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} 80x - 10y - 19z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} E1 - 80E3 \\ E2 - E3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -90y + 61z = 3 \\ -3y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} E1 - 30E2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} z = 3 \\ -3y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 3;\ y = 2;\ x = 1$$

El número buscado es 123.

36 (CCSS). Se mezclan tres clases de vino de la siguiente manera:
a) 5 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 3 de Lanzarote, resultando una mezcla de 120 pesetas/litro.
b) 1 litros de Tenerife, 3 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 111 pesetas/litro.
c) 3 litros de Tenerife, 6 de La Palma y 6 de Lanzarote, dando un vino de 116 pesetas/litro.
Halla el precio por litro de cada clase de vino.

Solución:
Sean x, y, z el precio, respectivo, del litro de vino de Tenerife, La Palma y Lanzarote.
Con los datos dados, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 5x+6y+3z=120\cdot 14 \\ x+3y+6z=111\cdot 10 \\ 3x+6y+6z=116\cdot 15 \end{cases}$$

Multiplicando la tercera ecuación por $\frac{9}{6}$ y restándole las otras dos ecuaciones, queda:

$\frac{9}{6}$(3x + 6y + 6z = 1740) – (5x + 6y + 3z = 1680) – (x + 3y + 6z = 1110) $\Rightarrow$

$\frac{-3}{2}x=-180 \Rightarrow$ x = 120.

Y con esto, y = 130, z = 100.

---

37 (CCSS). Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo; el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados. Sabiendo que si el primero que sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo; si el primero es zuavo, los restantes reciben un tercio de escudo, y si el primero es sajón, un cuarto de escudo, ¿cuántos hombres hay en cada compañía?

Solución:
Sean x, y, z el número de suizos, zuavos y sajones, respectivamente.

De acuerdo con el enunciado se tiene:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=901 \\ \frac{1}{3}x+y+\frac{1}{3}z=901 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+z=901 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=1802 \\ x+3y+z=2703 \\ x+y+4z=3604 \end{cases}$$

Haciendo las transformaciones que se indican, queda:

$$\begin{matrix} E1-2E3 \\ E2-E3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} -y-7z=-5406 \\ 2y-3z=-901 \\ x+y+4z=3604 \end{cases} \begin{matrix} \\ E2+2E1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} -y-7z=-5406 \\ -17z=-11713 \\ x+y+4z=3604 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=583 \\ z=689 \\ x=265 \end{matrix}$$

Otros problemas

38. Dos ciclistas corren por un velódromo a velocidades constantes. Cuando corren en sentido opuesto se encuentran cada 10 segundos, mientras que cuando van en el mismo sentido, un ciclista alcanza a otro cada 170 segundos.
¿Cuál es la velocidad de cada ciclista? Se sabe que la pista tiene una longitud de 170 metros?

Solución:
Sea v_1 la velocidad del ciclista más lento y v_2 la del más rápido.

Cuando van en sentido contrario tardan 10 segundos en encontrarse; luego recorren 170 m en 10 s, siendo su velocidad total la suma $v = v_1 + v_2$. Por tanto: $v_1 + v_2 = 17$ m/s

Cuando van en el mismo sentido, el más rápido alcanza al lento cuando da una vuelta más que él. Para ello debe recorrer en el mismo tiempo 170 m más. Si el lento recorre x m, el rápido recorrerá x + 170 m, ambos en un tiempo de 170 s (el que tardan en encontrarse); luego:

$$v_1 = \frac{x}{170} \text{ y } v_2 = \frac{x+170}{170}$$

Como $v_1 + v_2 = 17 \Rightarrow \dfrac{x}{170} + \dfrac{x+170}{170} = 17 \Rightarrow 2x + 170 = 17 \cdot 170 \Rightarrow$ x = 1360 m.

Por tanto:

$$v_1 = \frac{1360}{170} = 8 \text{ m/s} \qquad v_2 = \frac{1360+170}{170} = 9 \text{ m/s}$$

39. Mikel sale con un montón de cromos y vuelve a casa sin ninguno. Su madre le pregunta qué ha hecho con los cromos, a lo que Mikel responde: "A cada amigo que encontré le di la mitad de los cromos que tenía en ese momento más uno". Su madre le pregunta que cuántos amigos se ha encontrado, a lo que Mikel contesta que con cinco. ¿cuántos cromos tenía Mikel al salir de casa? Razona la respuesta.

Solución:
Cuando se encuentra con el 5º y último amigo deben quedarle dos cromos, pues es la única posibilidad de que la mitad menos 1 sea 0, que son los cromos con los que vuelve a casa. Este razonamiento es el que emplearemos, a continuación, para indicar todas las situaciones iniciales en su encuentro con los cinco amigos.

5º y último amigo:
tenía 2, pues su mitad, que es 1, más 1 = 2. Se queda con 0 cromos.

4º amigo:
tenía 6, pues su mitad, que es 3, más 1 = 4. Se queda con 2 cromos.

3º amigo:
tenía 14, pues su mitad, que es 7, más 1 = 8. Se queda con 6 cromos.

2º amigo:
tenía 30, pues su mitad, que es 15, más 1 = 16. Se queda con 14 cromos.

1er amigo:
tenía 62, pues su mitad, que es 31, más 1 = 32. Se queda con 30 cromos.

Por tanto, al salir de casa tenía 62 cromos, que reparte en las cantidades:

32 16 8 4 2

<u>Nota:</u> La manera más inmediata de hacer este problema es plantear una ecuación.
Si tiene x cromos al salir de casa,

al primer amigo le da $\frac{x}{2}+1=\frac{x+2}{2}$, y le quedan $\frac{x-2}{2}$

al segundo amigo le da $\frac{1}{2}(\frac{x-2}{2})+1=\frac{x+2}{4}$, y le quedan $\frac{x-2}{4}$

al tercer, cuarto y quinto amigo les da, respectivamente: $\frac{x+2}{8}$, $\frac{x+2}{16}$, $\frac{x+2}{32}$

Como $\frac{x+2}{2}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+2}{8}+\frac{x+2}{16}+\frac{x+2}{32}=x \Rightarrow x=62$

40. Demuestra que la expresión $n^3 - 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 6 para cada número natural n.

Solución:
Creo que la resolución de este problema requiere cierto ingenio y que posiblemente tenga varios caminos de solución. Aquí se dan dos. Inicialmente doy la primera que se me ocurrió; la segunda solución vino al considerar que lo hecho era demasiado largo. Pensé que debería haber algún camino más corto.

1ª solución.
Para que un número sea múltiplo de 6 debe serlo de 2 y de 3.

Veamos que es múltiplo de 2.
Todo número natural n es par, n = 2k, o impar, n = 2k.
Si n es par, n = 2k :

$$\begin{aligned} n^3 - 3n^2 + 2n &= 8k^3 - 12k^2 + 4k \\ &= 2(4k^3 - 6k^2 + 2k) \to \text{por tanto es múltiplo de 2} \end{aligned}$$

Si n es impar, n = 2k – 1 :

$$\begin{aligned} n^3 - 3n^2 + 2n &= (2k-1)^3 - 3(2k-1)^2 + 2(2k-1) \\ &= 8k^3 - 6k^2 + 6k - 1 - 3(4k^2 - 4k + 1) + 4k - 2 \\ &= 2(4k^3 - 9k^2 + 11k - 3) \to \text{por tanto es múltiplo de 2} \end{aligned}$$

Veamos que es múltiplo de 3.
Todo número natural n es de la forma: n = 3p, n = 3p + 1 o n = 3p + 2
Si n = 3p:

$$\begin{aligned} n^3 - 3n^2 + 2n &= 29p^3 - 27p^2 + 6p \\ &= 3(9p^3 - 9p^2 + 2p) \to \text{por tanto es múltiplo de 3} \end{aligned}$$

Si n = 3p + 1:

$$\begin{aligned} n^3 - 3n^2 + 2n &= (3p+1)^3 - 3(3p+1)^2 + 2(3p+1) \\ &= 27p^3 + 27p^2 + 9p + 1 - 3(9p^2 + 6p + 1) + 6p + 2 \\ &= 3(9k^3 - p) \to \text{por tanto es múltiplo de 3} \end{aligned}$$

Si n = 3p + 2:

$$\begin{aligned} n^3 - 3n^2 + 2n &= (3p+2)^3 - 3(3p+2)^2 + 2(3p+2) \\ &= 27p^3 + 54p^2 + 36p + 8 - 3(9p^2 + 12p + 4) + 6p + 4 \\ &= 3(9k^3 + 9p^2 + 2p) \to \text{por tanto es múltiplo de 3} \end{aligned}$$

Luego, para todo número natural n, $n^3 - 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 6.

2ª solución.
La expresión dada puede descomponerse en factores así:

$$n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = n(n-1)(n-2)$$

Esto es, puede escribirse como producto de tres números naturales consecutivos. Por tanto, siempre habrá un factor par y otro que sea múltiplo de 3. En consecuencia, su producto será múltiplo de 6.